2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *Uvažujme výraz*

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$

a) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
b) Nájdite najväčšiu hodnotu $V(x)$. (Aleš Kobza)

Riešenie. Výraz V je zrejme definovaný pre všetky reálne čísla x.

a) Keďže $x^4+1>0$ pre každé x, nerovnosť $V(x) \geqq 3$ je ekvivalentná s nerovnosťou $5x^4 - 4x^2 + 5 \geqq 3(x^4 + 1)$, čiže $2x^4 - 4x^2 + 2 \geqq 0$. Výraz na ľavej strane je rovný $2(x^2 - 1)^2$, takže je nezáporný pre každé x.

b) Využime nasledujúcu úpravu:

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1} = \frac{5(x^4 + 1)}{x^4 + 1} - \frac{4x^2}{x^4 + 1} = 5 - \frac{4x^2}{x^4 + 1}.$$

Keďže zlomok

$$\frac{4x^2}{x^4 + 1}$$

je vďaka párnym mocninám premennej x pre ľubovoľné reálne číslo x nezáporný, nadobúda výraz V svoju najväčšiu hodnotu $V_{\max}$ práve vtedy, keď

$$\frac{4x^2}{x^4 + 1} = 0,$$

teda práve vtedy, keď $x = 0$. Dostávame tak $V_{\max} = V(0) = 5$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za vyriešenie časti a), 4 body za úplné riešenie časti b): 3 body za dôkaz nerovnosti $V(x) \leqq 5$ a 1 bod za určenie rovnosti pre $x = 0$. Algebraickú úpravu zlomku $V(x)$ čiastočným vydelením čitateľa menovateľom bez ďalšieho úspešného zhodnotenia oceňte 1 bodom.

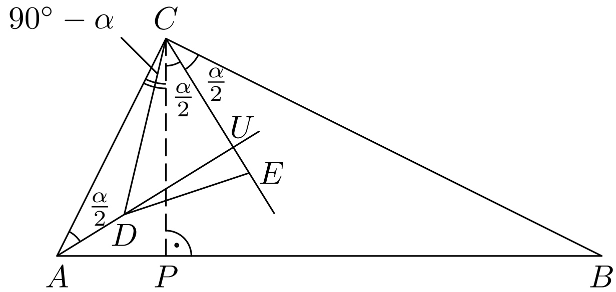
---

2. *V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a D, E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, CPB. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE.*
(Pavel Leischner)

Riešenie. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A, zrejme potom platí $|\measuredangle ACP| = 90° - \alpha$, $|\measuredangle PCB| = \alpha$. Stred D kružnice vpísanej trojuholníku APC leží na osi uhla PAC, takže $|\measuredangle DAC| = \frac{1}{2}\alpha$, a podobne aj $|\measuredangle PCE| = \frac{1}{2}\alpha$. Odtiaľ pre veľkosť uhla AUC v trojuholníku AUC, pričom U je priesečník polpriamok AD a CE (obr. 1), vychádza

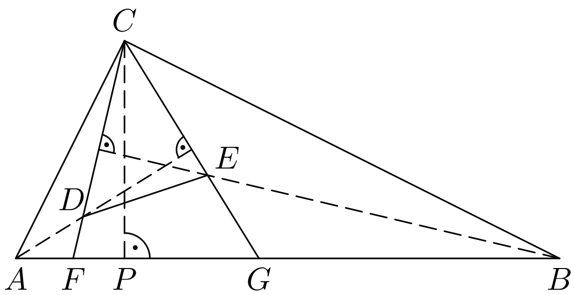
$$|\measuredangle AUC| = 180° - (90° - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha = 90°.$$

To znamená, že polpriamka AD je kolmá na CE, úsečka DU je teda výška v trojuholníku DEC. Úplne rovnako zistíme, že aj polpriamka BE (ktorá je zároveň osou uhla ABC) je kolmá na CD. Dostávame tak, že priesečník polpriamok AD a BE, čo je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, je zároveň aj priesečníkom výšok trojuholníka DEC.



Obr. 1

Iné riešenie. Označme F a G zodpovedajúce priesečníky priamok CD a CE so stranou AB (obr. 2). Podľa tvrdenia 2. úlohy školského kola je trojuholník CAG



Obr. 2

rovnoramenný so základňou CG. Os AD uhla CAG rovnoramenného trojuholníka CAG je tak aj jeho osou súmernosti a je preto kolmá na základňu CG, teda aj na CE. Podobne zistíme, že aj trojuholník CBF je rovnoramenný so základňou CF, takže os BE uhla FBC je kolmá na CF, teda aj na CD. Priesečník oboch osí AD a BE je tak nielen stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, ale aj priesečníkom výšok trojuholníka CDE, čo sme mali dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V opačnom prípade oceňte 1 bodom jednotlivé čiastočné poznatky vedúce k riešeniu (napríklad výpočet jedného z uhlov ACP alebo PCE). Za odhalenie rovnoramenného trojuholníka CAG alebo CBF a odkaz na úlohu školského kola dajte 3 body rovnako ako za iný dôkaz kolmosti AD a CE či BE a CD.

---

3. *Z množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ *je vybraných niekoľko rôznych čísel tak, že súčet žiadnych troch z nich nie je násobkom deviatich.*

a) Dokážte, že medzi vybranými číslami sú najviac štyri deliteľné tromi.

b) Ukážte, že vybraných čísel môže byť 26. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Podľa zvyškov po delení deviatimi rozdelíme všetkých 99 uvažovaných čísel do deviatich jedenásťprvkových tried $T_0, T_1, \ldots, T_8$ (do triedy T_i patria všetky čísla so zvyškom i):

$$T_0 = \{9, 18, 27, \dots, 99\},$$
$$T_1 = \{1, 10, 19, \dots, 91\},$$
$$T_2 = \{2, 11, 20, \dots, 92\},$$
$$\vdots$$
$$T_8 = \{8, 17, 26, \dots, 98\}.$$

a) Našou úlohou je dokázať, že v $T_0 \cup T_3 \cup T_6$ ležia najviac štyri vybrané čísla. Z každej z tried T_0, T_3, T_6 môžu pochádzať najviac dve z vybraných čísel (súčet ľubovoľných troch čísel z jednej takej triedy už totiž deliteľný deviatimi je). Keďže súčet ľubovoľných troch čísel, ktoré po jednom ležia v triedach T_0, T_3 a T_6, je deviatimi deliteľný, aspoň jedna z týchto tried žiadne vybrané číslo neobsahuje. Z oboch vyslovených záverov vyplýva dokazované tvrdenie: vybraných čísel deliteľných tromi je totiž najviac $2 + 2 + 0 = 4$.

b) Ukážeme, že vyhovujúci výber môže obsahovať 26 čísel. Vyberieme po dvoch číslach z T_0, T_3 a po 11 číslach (teda všetky čísla) z T_1 a T_2. Dostaneme tak celkom $2 \cdot 2 + 2 \cdot 11 = 26$ čísel; pritom súčet ľubovoľných troch z nich dáva po delení deviatimi zvyšok aspoň $0 + 0 + 1 = 1$, najviac však $2 + 3 + 3 = 8$, takže deviatimi deliteľný byť nemôže.

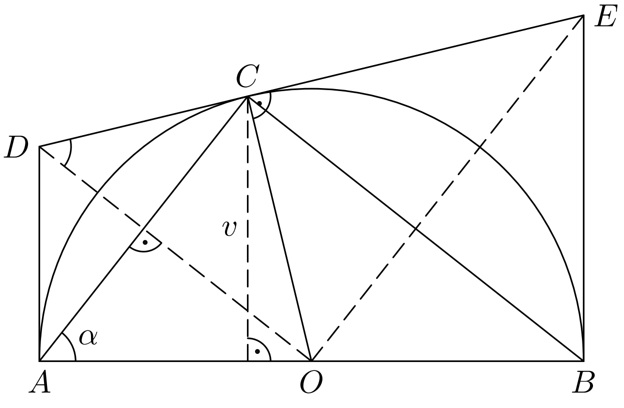
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, a to 3 body za časť a) a 3 body za časť b). Ak žiaci v časti b) iba uvedú množinu 26 čísel, ktorá spĺňa podmienku zo zadania, bez toho, aby tento fakt nejako odôvodnili, dajte za túto časť iba 1 bod.

---

4. *Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S.*

(*Peter Novotný*)

Riešenie. Označme O stred opísanej kružnice, teda stred prepony AB daného pravouhlého trojuholníka ABC, a v veľkosť jeho výšky na preponu (obr. 3). Trojuholník



Obr. 3

EDO je zrejme tiež pravouhlý, pretože jeho strany DO a EO sú kolmé na odvesny trojuholníka ABC; pritom jeho výškou na preponu je úsečka OC (s veľkosťou $\frac{1}{2}c$). Vzhľadom na súmernosť úsečky AC podľa osi OD platí pre jeho uhol pri vrchole D, že $|\measuredangle CDO| = 90° - |\measuredangle COD| = 90° - |\measuredangle AOD| = \alpha$. Trojuholníky EDO a ABC sú teda podobné (uu). Koeficient k tejto podobnosti je daný pomerom dĺžok zodpovedajúcich výšok na prepony, takže $k = |OC|/v = \frac{1}{2}c/v$, a keďže $vc = 2S$, je

$$k = \frac{c^2}{4S}.$$

V uvedenej podobnosti zodpovedá prepone AB prepona DE, preto pre jej veľkosť platí

$$|DE| = kc = \frac{c^3}{4S}.$$

Iné riešenie. Zo súmernosti dotyčníc z bodu ku kružnici vyplýva, že oba trojuholníky ACD aj BCE sú rovnoramenné, $|AD| = |DC|$, $|BE| = |CE|$. Rovnoramenné sú aj trojuholníky ACO a BCO, pričom O je stred prepony AB (ramená oboch trojuholníkov majú veľkosť polomeru kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku ABC, čo je $\frac{1}{2}c$). Ukážeme, že ide o dve dvojice podobných trojuholníkov $ACD \sim BCO$ a $ACO \sim BCE$. K tomu si stačí všimnúť, že v štvoruholníku $AOCD$, ktorý je zložený z dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov, platí $|\measuredangle CDA| = 180° - |\measuredangle AOC| = |\measuredangle COB|$. Rovnoramenné trojuholníky ACD a BCO sú teda podobné podľa vety *uu*. Z tejto podobnosti vyplýva rovnosť $|CD| : |CA| = |CO| : |CB|$, takže pri zvyčajnom označení odvesien dostávame $|CD| = \frac{1}{2}cb/a$, a z podobnosti trojuholníkov ACO a BCE potom $|CE| = \frac{1}{2}ca/b$. Celkom tak je

$$|DE| = |DC| + |CE| = \frac{cb}{2a} + \frac{ca}{2b} = \frac{cb^2 + ca^2}{2ab} = \frac{c(a^2 + b^2)}{2 \cdot 2S} = \frac{c^3}{4S}.$$

Poznámky. Podobnosť spomenutých rovnoramenných trojuholníkov môžeme odvodiť tiež tak, že si všimneme rovnosti zodpovedajúcich uhlov ACO a BCE pri základniach: oba totiž dopĺňajú uhol OCB do pravého uhla (ACB, resp. OCE). Preto $ACO \sim BCE$.

Ďalšiu možnosť dáva objavenie rovnosti $|\measuredangle ADO| = |\measuredangle BAC| = \alpha$ (ramená jedného uhla sú kolmé na ramená druhého). Z pravouhlého trojuholníka ODA tak máme $|AO| : : |AD| = \operatorname{tg} |\measuredangle ADO| = \operatorname{tg} \alpha = a : b$, takže $|CD| = |AD| = \frac{1}{2}cb/a$, a analogicky pre pravouhlý trojuholník OEB.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odhalenie vhodnej rovnosti uhlov dajte 3 body, za výpočet dĺžky úsečky DE ďalšie 3 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.