2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Po okruhu behajú dvaja atléti, každý inou konštantnou rýchlosťou. Keď bežia opačnými smermi, stretávajú sa každých 10 minút, keď bežia rovnakým smerom, stretávajú sa každých 40 minút. Za aký čas zabehne okruh rýchlejší atlét?* (Vojtech Bálint)

Riešenie. Označme rýchlosti bežcov v_1 a v_2 tak, že $v_1 > v_2$ (rýchlosti udávame v okruhoch za minútu). Predstavme si, že atléti vyštartujú z rovnakého miesta, ale opačným smerom. V okamihu ich ďalšieho stretnutia po 10 minútach bude súčet dĺžok oboch prebehnutých úsekov zodpovedať presne dĺžke jedného okruhu, teda $10v_1+10v_2 = 1$.

Ak bežia atléti z rovnakého miesta rovnakým smerom, dôjde k ďalšiemu stretnutiu, akonáhle rýchlejší atlét zabehne o jeden okruh viac ako pomalší. Preto $40v_1 - 40v_2 = 1$.

Dostali sme sústavu dvoch lineárnych rovníc s neznámymi v_1, v_2:

$$10v_1 + 10v_2 = 1,$$
$$40v_1 - 40v_2 = 1,$$

ktorú vyriešime napríklad tak, že k štvornásobku prvej rovnice pripočítame druhú, čím dostaneme $80v_1 = 5$, čiže $v_1 = \frac{1}{16}$. Zaujíma nás, ako dlho trvá rýchlejšiemu bežcovi prebehnúť jeden okruh, teda hodnota podielu $1/v_1$. Po dosadení vypočítanej hodnoty v_1 dostaneme *odpoveď*: 16 minút.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj úvahou: za 40 minút ubehnú atléti spolu 4 okruhy (to vyplýva z prvej podmienky), pritom rýchlejší o 1 okruh viac ako pomalší (to vyplýva z druhej podmienky). To teda znamená, že prvý za uvedenú dobu ubehne 2,5 okruhu a druhý 1,5 okruhu, takže rýchlejší ubehne jeden okruh za $40/2{,}5 = 16$ minút.

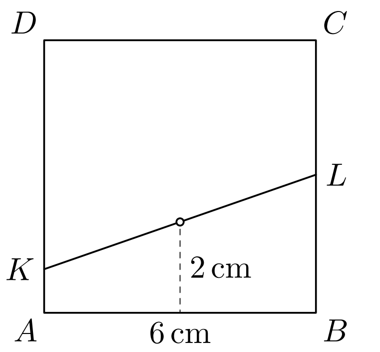
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho po 2 bodoch za zostavenie jednotlivých rovníc a 2 body za výpočet požadovanej hodnoty.

---

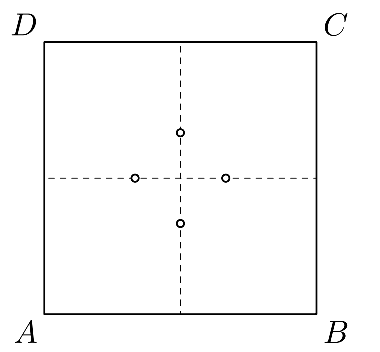
2. *Daný je štvorec so stranou dĺžky* 6 cm*. Nájdite množinu stredov všetkých priečok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah* $12\,\mathrm{cm}^2$*. (Priečka štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.)* (Pavel Leischner)

Riešenie. Ak priečka delí štvorec na dva štvoruholníky, musia ich koncové body ležať na protiľahlých stranách štvorca. V takom prípade sú oba štvoruholníky lichobežníkmi alebo pravouholníkmi (pre potreby tohto riešenia budeme pravouholník považovať za špeciálny lichobežník). Označme daný štvorec $ABCD$, koncové body priečky označme K a L. Predpokladajme, že bod K leží na strane AD, potom bod L leží na strane BC. Jeden zo štvoruholníkov $KABL$ a $KDCL$ má podľa zadania obsah $12\,\mathrm{cm}^2$; nech je to napr. lichobežník $KABL$.

Obsah lichobežníka vypočítame ako súčin jeho výšky s dĺžkou strednej priečky. Výška je v našom prípade rovná dĺžke strany štvorca, čiže 6 cm. Jeho stredná priečka má teda dĺžku 2 cm. Z toho vyplýva, že stred úsečky KL musí ležať na osi strany AB vo



Obr. 1



Obr. 2

vzdialenosti 2 cm od stredu strany AB (obr. 1). Platí to aj naopak: Ak stred úsečky KL leží v opísanej polohe, bude štvoruholník $KABL$ lichobežník s obsahom $12\,\mathrm{cm}^2$.

Ak budeme namiesto lichobežníka $KABL$ uvažovať lichobežník $KDCL$, vyjde stred priečky KL na osi úsečky CD vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany CD.

Ak priečka KL spája body na stranách AB a CD, dostaneme ďalšie dva možné body ležiace na spojnici stredov úsečiek AD a BC. Hľadanú množinu teda tvoria štyri body, ktoré ležia na priečkach spájajúcich stredy protiľahlých strán štvorca vo vzdialenosti 1 cm od jeho stredu (obr. 2).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ nezdôvodní, že nájdené body majú požadovanú vlastnosť (má iba dôkaz nutnej podmienky), dajte nanajvýš 5 bodov. Za objavenie jedného z bodov skúmanej množiny bez dôkazu správnosti dajte len 1 bod a za opis celej správnej množiny bez dôkazu správnosti 2 body.

---

3. *Nech x, y sú také kladné celé čísla, že obe čísla $3x+5y$ a $5x+2y$ sú deliteľné číslom 60. Zdôvodnite, prečo číslo 60 delí aj súčet $2x+3y$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Na základe predpokladu zo zadania vieme, že existujú kladné celé čísla m a n, pre ktoré platí

$$3x+5y=60m,$$
$$5x+2y=60n.$$

Na tieto vzťahy sa môžeme pozerať ako na sústavu lineárnych rovníc s neznámymi x a y a parametrami m a n. Vyriešiť ju vieme ľubovoľnou štandardnou metódou, napríklad od dvojnásobku prvej rovnice odčítame päťnásobok druhej a vyjadríme x, potom dopočítame y. Dostaneme

$$x=\frac{60(5n-2m)}{19}, \qquad y=\frac{60(5m-3n)}{19}.$$

Keďže čísla 19 a 60 sú nesúdeliteľné, sú obe čísla x a y deliteľné 60. Preto aj súčet $2x+3y$ je deliteľný 60.

Iné riešenie. Vieme, že $60=3\cdot4\cdot5$. Pritom čísla 3, 4, 5 sú po dvoch nesúdeliteľné, preto na dôkaz deliteľnosti 60 stačí dokázať deliteľnosť jednotlivými číslami 3, 4, 5.

Keďže číslo $3x+5y$ je deliteľné 5, je aj x deliteľné 5. Podobne z relácie $5 \mid 5x+2y$ vyplýva $5 \mid y$. Preto 5 delí aj $2x+3y$.

Keďže číslo $3x + 5y$ je deliteľné 3, je y deliteľné 3. Vzhľadom na $3 \mid 5x + 2y$ máme tiež $3 \mid 5x$, a teda $3 \mid x$. Preto 3 delí aj $2x + 3y$.

Keďže $4 \mid 3x + 5y$ a $4 \mid 5x + 2y$, máme aj $4 \mid (3x + 5y) + (5x + 2y) = 8x + 7y$, takže $4 \mid y$. Ďalej napríklad $4 \mid 3x + 5y$, takže $4 \mid 3x$, čiže $4 \mid x$. Preto 4 delí aj $2x + 3y$.

Iné riešenie. Vyjadríme výraz $2x + 3y$ pomocou $3x + 5y$ a $5x + 2y$. Budeme hľadať čísla p a q také, že $2x + 3y = p(3x + 5y) + q(5x + 2y)$ pre každú dvojicu celých čísel x, y. Jednoduchou úpravou dostaneme rovnicu

$$(2 - 3p - 5q)x + (3 - 5p - 2q)y = 0. \tag{1}$$

Ak budú hľadané čísla p a q spĺňať sústavu

$$\begin{aligned} 3p + 5q &= 2, \\ 5p + 2q &= 3, \end{aligned}$$

bude zrejme rovnosť (1) splnená pre každú dvojicu x, y. Vyriešením sústavy dostaneme $p = 11/19$, $q = 1/19$. Dosadením do (1) dostávame vyjadrenie

$$19(2x + 3y) = 11(3x + 5y) + (5x + 2y),$$

z ktorého vyplýva, že spolu s číslami $3x + 5y$ a $5x + 2y$ je súčasne deliteľné 60 aj číslo $2x + 3y$, pretože čísla 19 a 60 sú nesúdeliteľné.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak chýba zmienka o nesúdeliteľnosti čísel 19 a 60 a táto nesúdeliteľnosť je v riešení potrebná, dajte nanajvýš 5 bodov. Za čiastočný pokrok v prvom riešení dajte 2 body za zostavenie sústavy rovníc a 4 body za zostavenie a vyriešenie sústavy rovníc alebo vyjadrenie x a y pomocou parametrov.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.