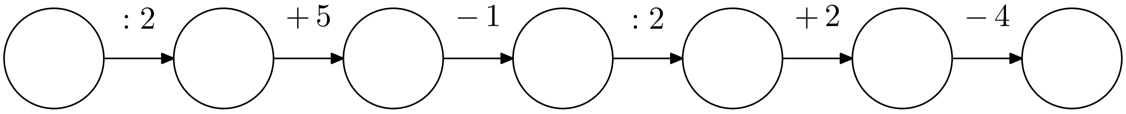
2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z4*

---

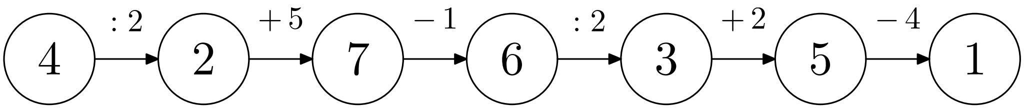
1. *Doplň do prázdnych políčok čísla od* 1 *do* 7 *každé raz tak, aby matematické operácie boli vypočítané správne.* (*M. Smitková*)



Obr. 1

Riešenie. Ak by sme do prvého políčka doplnili číslo 1, tak do druhého by malo ísť $1:2$, čo však nevyjde celé číslo. Podobne do prvého políčka nepasujú ani ostatné nepárne čísla 3, 5 a 7. Stačí to teda skúšať s párnymi číslami 2, 4 a 6, ktoré sa dajú vydeliť dvoma:

- Keď doplníme do prvého políčka číslo 2, do druhého musíme dať $2:2=1$. Potom do tretieho pôjde $1+5=6$, do štvrtého $6-1=5$, a piate políčko sa nedá doplniť, lebo $5:2$ nevyjde celé číslo.
- Keď doplníme do prvého políčka číslo 4, do druhého musíme dať $4:2=2$. Potom do tretieho pôjde $2+5=7$, do štvrtého $7-1=6$, do piateho $6:2=3$, do šiesteho $3+2=5$ a do posledného siedmeho $5-4=1$. Na obr. 2 vidíme, že sme každé číslo od 1 do 7 naozaj raz použili, ako vyžadovalo zadanie.



Obr. 2

- Keď doplníme do prvého políčka číslo 6, do druhého musíme dať $6:2=3$. Potom do tretieho pôjde $3+5=8$, čo nevyhovuje, lebo to nie je číslo od 1 do 7. Ďalej už teda dopĺňať nemusíme (ale aj v prípade, že by sme to skúsili, do štvrtého by vyšlo $8-1=7$ a piate políčko by sme nevedeli vyplniť, lebo $7:2$ nevyjde celé číslo).

Jediné riešenie je teda to, ktoré je uvedené na obr. 2.

---

2. *Miško a Jarka sú súrodenci. Jarka má narodeniny niekedy v januári. O Miškovi vieme, že v roku 2010 bola od Jarkiných narodenín po Miškove narodeniny presne jedna sobota trinásteho. Zisti, v ktorom mesiaci sa narodil Miško. Nájdi všetky možnosti.* (*M. Dillingerová*)

Riešenie. Pri listovaní kalendárom pre rok 2010 rýchlo zistíme, že 13. januára bola streda, 13. februára bola sobota a aj 13. marca bola sobota[1]. Miško sa určite nemohol narodiť v januári, lebo v takom prípade by medzi Jarkinými a jeho narodeninami nebol buď žiadny dátum trinásteho (ak by sa obaja narodili pred alebo obaja po 13. januári), alebo by to bola januárová streda, nie sobota (ak by sa Jarka narodila pred a Miško po 13. januári).

[1] Aj na 13. novembra vychádza sobota, ale úlohu to už nijako neovplyvní.

Vo februári sa Miško narodiť mohol, a to hocikedy medzi 14. a 28. februárom. Medzi Jarkinými a jeho narodeninami by v takom prípade bola určite sobota 13. februára a iná sobota trinásteho by medzi nimi určite nebola (bez ohľadu na to, v ktorý januárový deň sa Jarka narodila, keďže 13. január bola streda).

Miško sa mohol narodiť aj medzi 1. a 12. marcom. Medzi Jarkinými a jeho narodeninami by opäť bola iba sobota 13. februára.

Neskôr ako 13. marca, a teda v žiadnom neskoršom mesiaci sa Miško narodiť nemohol, lebo inak by medzi Jarkinými a jeho narodeninami boli už aspoň dve soboty trinásteho: februárová aj marcová. Narodiť sa preto mohol iba vo februári alebo v marci.

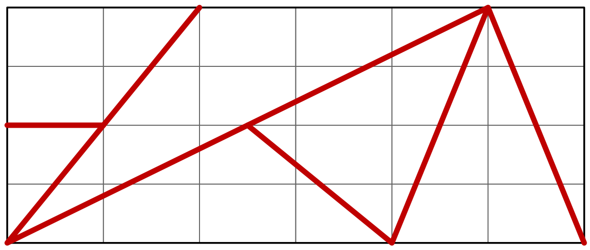
---

3. *Koľko trojciferných čísiel má prvú číslicu trikrát väčšiu ako druhú a tretiu číslicu o 4 menšiu ako prvú? Vypíš všetky také čísla.* (*M. Smitková, M. Dillingerová*)

Riešenie. Prvá cifra musí byť trojnásobkom druhej a zároveň nemôže byť nulová, čiže to môže byť iba 3, 6 alebo 9. K týmto možnostiam prislúcha na druhej pozícii postupne 1, 2 a 3. Ale ak by bola na prvej pozícii trojka, tretia cifra by nemohla byť od nej o 4 menšia. Na prvej pozícii tak môže byť iba 6 alebo 9. Potom tretia cifra bude 2, resp. 5. Opísanú vlastnosť majú teda iba dve trojciferné čísla: 622 a 935.

---

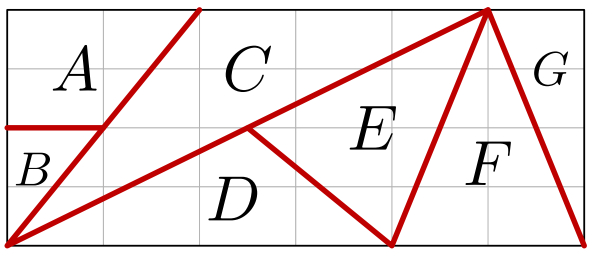
4. *Jožkovi sa podarilo rozlámať čokoládu na takéto kúsky:*



Obr. 3

Dala by sa táto čokoláda bez ďalšieho lámania spravodlivo rozdeliť dvom kamarátom? Ako?
Dala by sa táto čokoláda spravodlivo rozdeliť bez ďalšieho lámania trom kamarátom? Ako?
Ak sa to dá, nájdi vždy aspoň jeden spôsob. (*M. Dillingerová*)

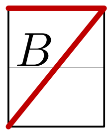
Riešenie. Pre jednoduchšie vyjadrovanie označme každý zo siedmich kúskov čokolády písmenom ako na obr. 4.



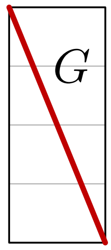
Obr. 4

Aby sme vedeli čokoládu spravodlivo rozdeliť, potrebujeme vedieť, aké veľké sú jednotlivé kúsky. Celá čokoláda sa skladá z $4 \cdot 6 = 24$ malých obdĺžnikových dielikov.

Pre niektoré kúsky je to jednoduché. Napríklad kúsok B je presnou polovicou obdĺžnika tvoreného dvoma pôvodnými dielikmi, je v ňom preto presne toľko čokolády ako v jednom dieliku (obr. 5a). Podobne je to s kúskom G, ktorý je polovicou obdĺžnika tvoreného



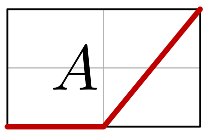
Obr. 5a



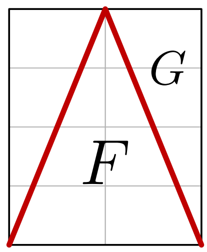
Obr. 5b

štyrmi dielikmi a je v ňom teda toľko čokolády ako v dvoch dielikoch (obr. 5b).

Celkom ľahko vieme určiť aj veľkosť kúskov A a F. Kúsok A obsahuje dva celé dieliky a zvyšná jeho časť je rovnaká ako kúsok B – je polovicou obdĺžnika tvoreného dvoma dielikmi. Spolu A obsahuje toľko čokolády ako tri dieliky (obr. 6a). Kúsok F



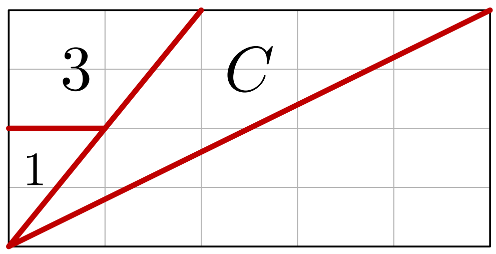
Obr. 6a



Obr. 6b

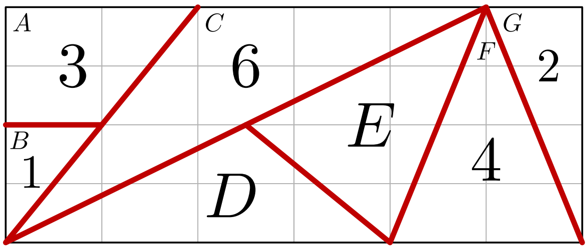
sa dá rozdeliť zvislou čiarou na dve časti rovnako veľké ako kúsok G, čiže je od neho dvakrát väčší a obsahuje toľko čokolády ako štyri dieliky (obr. 6b).

Teraz určíme veľkosť kúska C. Ten spolu s kúskami A, B veľkostí 1 a 3 dieliky vytvára trojuholník, ktorý je presnou polovicou obdĺžnika zloženého z 20 dielikov (obr. 7). Takže spolu tie tri kúsky obsahujú toľko čokolády ako 10 dielikov a na kúsok C vychádza 6 dielikov $(10 - 1 - 3 = 6)$.



Obr. 7

Zistené veľkosti kúskov doplníme namiesto písmen do obr. 8. Úlohu už teraz vyriešime aj bez zistenia veľkostí zvyšných kúskov D a E.



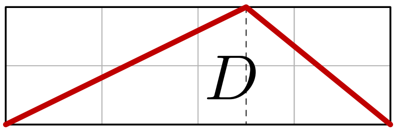
Obr. 8

Medzi dvoch kamarátov rozdelíme čokoládu z 24 dielikov spravodlivo tak, že každý dostane kúsky, ktoré budú mať spolu $24 : 2 = 12$ dielikov. Jeden môže dostať napríklad kúsky C, F a G, ktoré majú spolu $6 + 4 + 2$ dielikov, a druhý zvyšné kúsky A, B, D, E (ktoré tým pádom musia mať spolu tiež 12 dielikov). Inou možnosťou je dať jednému A, B, C, G $(3 + 1 + 6 + 2 = 12)$ a druhému zvyšné D, E, F $(24 - 12 = 12)$.

Pri troch kamarátoch musíme dať každému $24 : 3 = 8$ dielikov. Prvému dáme C a G $(6 + 2 = 8)$, druhému A, B a F $(3 + 1 + 4 = 8)$ a tretiemu zvyšné D a E $(24 - 8 - 8 = 8)$.

V oboch prípadoch sa teda čokoláda dá spravodlivo rozdeliť.

Poznámka. Kúsky D a E, ktorých veľkosť sme v riešení presne nevyjadrili, lebo sme to nepotrebovali, sú rovnako veľké: každý z nich má toľko čokolády ako 4 dieliky. Ukázať sa to dá napríklad tak, že kúsok D rozdelíme zvislou čiarou na dva menšie



Obr. 9

trojuholníky. Z nich každý je presne polovicou jedného obdĺžnika a oba obdĺžniky majú spolu 8 dielikov (obr. 9), takže D musí mať 4 dieliky. Kúsok E potom má zvyšné 4 dieliky, ktoré chýbajú do celej čokolády $(24 - 3 - 1 - 6 - 4 - 4 - 2 = 4)$. Existuje preto niekoľko ďalších možností, ako rozdeliť čokoládu spravodlivo medzi dvoch, resp. troch kamarátov. Presnejšie, kúsok F môžeme vo vyššie uvedených rozdeleniach vymeniť s kúskom D alebo E.

---

5. *Na stôl do kuchyne položila mamička vylúskaný hrach v miske. Danka a Janka pochúťku objavili a začali hrášky z misky vyjedať. Dohodli sa, že Danka si bude z misky brať vždy 2 guľôčky hrachu. Janka si bude pravidelne brať 2, 4, 1 a 1 guľôčku hrachu a potom začne opäť od začiatku. Najskôr si vzala z misky Danka 2 hrášky, potom Janka 2, opäť Danka 2, Janka svoje 4, atď. Zrazu prišla do kuchyne ich mamička a prekvapene zhíkla: „Veď v miske už zostala iba polovica hrachu!“ Dievčatá začali byť zvedavé a spočítali, že tam ostalo 45 guľôčok hrachu. Ak sa mamička nemýlila a zvyšných 45 guľôčok bola naozaj polovica z toho, čo bolo v miske na začiatku, zjedli potom dievčatá rovnako alebo niektorá zjedla viac? Koľko hráškov zjedla Danka? A koľko ich zjedla Janka?*

(*M. Dillingerová*)

Riešenie. V miske ostalo 45 guľôčok hrachu. Ak to bola presne polovica, znamená to, že dievčatá zjedli druhú polovicu, ktorú tvorilo taktiež 45 guľôčok. Začnime od začiatku a sledujme, ako hrášky ubúdali. Do posledného stĺpca budeme písať, koľko dokopy obe zjedli, aby sme ustrážili, kedy ubudne 45. guľôčka. Priebežne tiež budeme počítať, koľko zjedlo každé z dievčat.

kolo	Danka	Janka	zjedených celkom
1.	2	2	4
2.	2	4	10
3.	2	1	13
4.	2	1	16
spolu	8	8	

Počas prvých štyroch „kôl" zjedla každá zo sestier 8 hráškov. Rovnako prebehli aj ďalšie 4 kolá:

kolo	Danka	Janka	zjedených celkom
doteraz	8	8	16
5.	2	2	20
6.	2	4	26
7.	2	1	29
8.	2	1	32
spolu	16	16	

Po ôsmich kolách mali obe zjedené po 16 hráškov. Pokračujme ďalej:

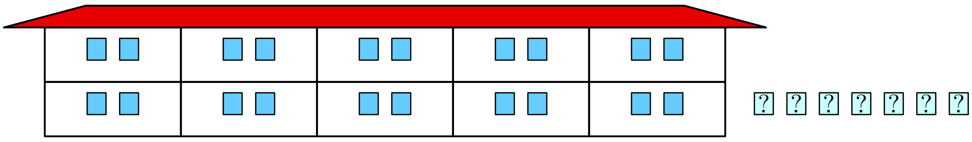
kolo	Danka	Janka	zjedených celkom
doteraz	16	16	32
9.	2	2	36
10.	2	4	42
11.	2	1	45
spolu	22	23	

Po jedenástich kolách dievčatá zjedli spolu presne 45 guľôčok. Za posledné tri kolá pribudlo Danke 6 guľôčok a Janke 7 guľôčok. Janka teda zjedla viac hráškov. Danka ich zjedla 22 a Janka 23.

6. *V našej bytovke je 10 bytov. Niektoré majú 4, niektoré 3 a niektoré 2 okná. Na našej bytovke je celkom 27 okien. Bytov s dvomi oknami je v bytovke najviac. Koľko je ktorých bytov?* (M. Dillingerová)

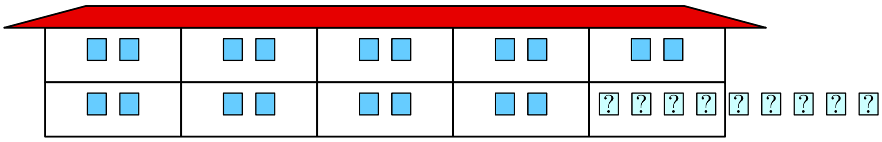
Riešenie. Úvahy budeme robiť podľa počtu bytov s dvoma oknami, ktorých je podľa zadania najviac.

- Určite nemôžu mať všetky byty len po dve okná, lebo to by okien bolo spolu iba $10 \cdot 2 = 20$, nie 27 (obr. 10).



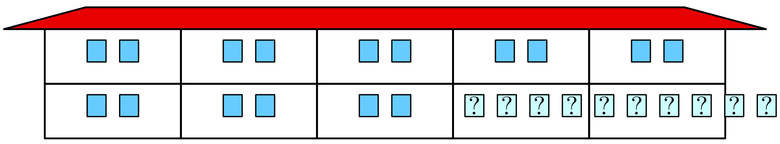
Obr. 10

- Keby bolo dvojoknových bytov 9, bolo by v nich spolu $9 \cdot 2 = 18$ okien. A zvyšných 9 okien ($27 - 18 = 9$) by bolo príliš veľa na jeden byt (obr. 11).



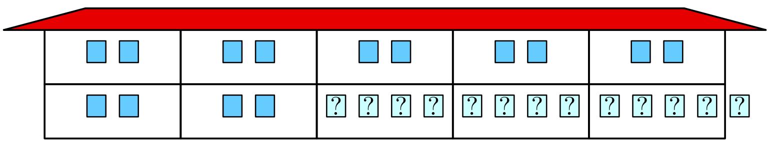
Obr. 11

- Keby ich bolo 8, tak by v nich bolo $8 \cdot 2 = 16$ okien, a zvyšných 11 okien ($27 - 16 = 11$) by bolo príliš veľa na dva byty (obr. 12).



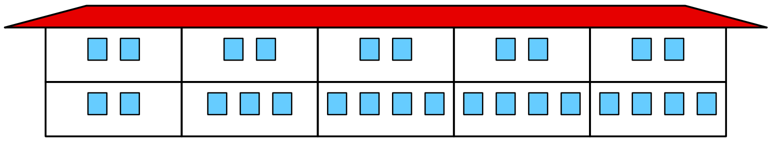
Obr. 12

- Keby ich bolo 7, tak by v nich bolo $7 \cdot 2 = 14$ okien, a zvyšných 13 okien ($27 - 14 = 13$) by bolo stále príliš veľa na tri byty (obr. 13, v každom byte sú najviac štyri okná, teda spolu sa dá doplniť najviac $3 \cdot 4 = 12$ okien).



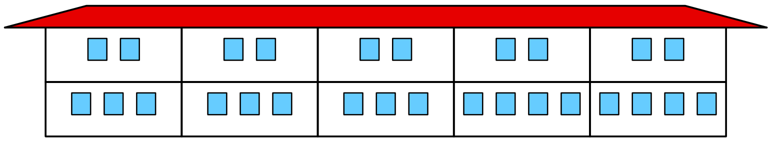
Obr. 13

- Ak je bytov s dvoma oknami 6, je v nich spolu $6 \cdot 2 = 12$ okien. Vo zvyšných štyroch bytoch musí byť spolu $27 - 12 = 15$ okien a v každom z nich musia byť buď tri alebo štyri okná. Dá sa to urobiť len tak, že do troch bytov dáme po štyri okná a do štvrtého tri okná ($4+4+4+3=15$). Dostávame tým prvé vyhovujúce riešenie: bytov s dvoma oknami je šesť, byt s tromi oknami je jeden a byty so štyrmi oknami sú tri (obr. 14).



Obr. 14

- Ak je bytov s dvoma oknami 5, je v nich spolu $5 \cdot 2 = 10$ okien. Vo zvyšných piatich bytoch musí byť spolu $27 - 10 = 17$ okien a v každom z nich musia byť buď tri alebo štyri okná. Dá sa to urobiť len tak, že do troch bytov dáme po tri okná a do dvoch po štyri okná ($3+3+3+4+4=17$). Dostávame druhé riešenie: bytov s dvoma oknami je päť, byty s tromi oknami sú tri a byty so štyrmi oknami sú dva (obr. 15).



Obr. 15

- Ak by byty s dvoma oknami boli 4, bolo by v nich spolu $4 \cdot 2 = 8$ okien. Vo zvyšných šiestich bytoch by muselo byť spolu $27 - 8 = 19$ okien a v každom z nich by museli byť buď tri alebo štyri okná. Jediná možnosť je dať 5 bytov s tromi oknami a 1 byt so štyrmi oknami ($3+3+3+3+3+4=19$). To však nevyhovuje zadaniu, lebo bytov s tromi oknami by bolo viac ako bytov s dvoma oknami.
- Byty s dvoma oknami nemôžu byť menej ako štyri, v takom prípade už by totiž nutne muselo byť buď bytov s tromi alebo bytov so štyrmi oknami viac, takže bytov s dvoma oknami by nebolo najviac.

Úloha má teda dve riešenia, sú znázornené na obr. 14 a 15.

Iné riešenie. V každom z desiatich bytov sú aspoň dve okná. Spolu je to $10 \cdot 2 = 20$ okien. Teraz už len musíme pridať zvyšných 7 okien do niektorých bytov, pričom do každého bytu môžeme pridať najviac dve okná.

- Ak by sme každé zo siedmich okien pridali do iného bytu, dostali by sme 7 bytov s tromi oknami a len 3 byty s dvoma oknami, teda bytov s dvoma oknami by nebolo najviac.
- Ďalšou možnosťou je pridať dve okná do jedného bytu a zvyšných 5 okien po jednom do ďalších piatich bytov. Opäť by však nebolo najviac bytov s dvoma oknami (boli by len 4, zatiaľ čo bytov s tromi oknami by bolo 5).
- Ak pridáme po dve okná do dvoch bytov a zvyšné tri okná po jednom do troch bytov, dostaneme vyhovujúce riešenie ako na obr. 15.
- Ak pridáme po dve okná do troch bytov a zvyšné jedno okno do jedného bytu, dostaneme vyhovujúce riešenie ako na obr. 14.

Iné možnosti nie sú, keďže na štyri alebo viac bytov s dvoma oknami by sme potrebovali navyše aspoň 8 okien.