2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

---

1. *Vlado má napísané dve čísla,* 541 *a* 293*. Zo šiestich použitých cifier má najskôr vyškrtnúť dve tak, aby súčet dvoch takto získaných čísel bol najväčší možný. Potom má z pôvodných šiestich cifier vyškrtnúť dve tak, aby rozdiel dvoch takto získaných čísel bol najmenší možný (odčíta menšie číslo od väčšieho). Ktoré cifry má v jednotlivých prípadoch vyškrtnúť?* (*M. Petrová*)

Riešenie. Najskôr budeme škrtať cifry tak, aby bol súčet čo najväčší. Buď môžeme dve cifry vyškrtnúť z prvého čísla, alebo môžeme dve cifry vyškrtnúť z druhého, alebo môžeme vyškrtnúť z každého čísla po jednej cifre. V každom prípade škrtáme cifry tak, aby bol výsledný súčet čo najväčší. Dostávame tieto súčty:

- škrtneme 4 a 1, zostane 5 a 293: súčet 298,
- škrtneme 2 a 3, zostane 541 a 9: súčet 550,
- škrtneme 1 a 2, zostane 54 a 93: súčet 147.

Vidíme, že najväčší súčet (550) získame po vyškrtnutí cifier 2 a 3 z druhého čísla.

Teraz budeme hľadať najmenší možný rozdiel. Opäť môžeme škrtnúť dve cifry z prvého čísla, alebo dve cifry z druhého, alebo z každého čísla po jednej cifre. Keby sme škrtali dve cifry z jedného čísla, bol by rozdiel vždy trojmiestne číslo. Keď škrtáme z každého čísla po jednej cifre, dostaneme tieto čísla:

- škrtneme 5 a 2, zostane 41 a 93: rozdiel 52,
- škrtneme 5 a 9, zostane 41 a 23: rozdiel 18,
- škrtneme 5 a 3, zostane 41 a 29: rozdiel 12,
- škrtneme 4 a 2, zostane 51 a 93: rozdiel 42,
- škrtneme 4 a 9, zostane 51 a 23: rozdiel 28,
- škrtneme 4 a 3, zostane 51 a 29: rozdiel 22,
- škrtneme 1 a 2, zostane 54 a 93: rozdiel 39,
- škrtneme 1 a 9, zostane 54 a 23: rozdiel 31,
- škrtneme 1 a 3, zostane 54 a 29: rozdiel 25.

Vidíme, že najmenší rozdiel (12) získame vyškrtnutím 5 z prvého čísla a 3 z druhého čísla.

---

2. *V Trpasličom kráľovstve merajú vzdialenosti v rozprávkových míľach (rm), v rozprávkových siahach (rs) a v rozprávkových lakťoch (rl). Na vstupnej bráne do Trpasličieho kráľovstva je nasledujúca tabuľka na prevody medzi ich jednotkami a našimi:*

- *1 rm = 385 cm,*
- *1 rs = 105 cm,*
- *1 rl = 250 mm.*

Kráľ Trpaslík I. nechal premerať vzdialenosť od zámockej brány k rozprávkovému jazierku. Traja pozvaní zememerači dospeli k týmto výsledkom: prvý nameral 4 rm 4 rs 18 rl, druhý 3 rm 2 rs 43 rl a tretí 6 rm 1 rs 1 rl. Jeden z nich sa však pomýlil. Aká je vzdialenosť v centimetroch od zámockej brány k rozprávkovému jazierku? O koľko centimetrov sa pomýlil nepresný zememerač? (*M. Petrová*)

Riešenie. Najskôr prevedieme rozprávkové miery napríklad na centimetre:

$$1\,\mathrm{rm} = 385\,\mathrm{cm},\ \ 1\,\mathrm{rs} = 105\,\mathrm{cm},\ \ 1\,\mathrm{rl} = 25\,\mathrm{cm}.$$

Teraz vyjadríme v centimetroch vzdialenosti namerané jednotlivými zememeračmi:
1. zememerač nameral 4 rm 4 rs 18 rl, t. j.

$$4 \cdot 385 + 4 \cdot 105 + 18 \cdot 25 = 1\,540 + 420 + 450 = 2\,410\,(\mathrm{cm}).$$

2. zememerač nameral 3 rm 2 rs 43 rl, t. j.

$$3 \cdot 385 + 2 \cdot 105 + 43 \cdot 25 = 1\,155 + 210 + 1\,075 = 2\,440\,(\mathrm{cm}).$$

3. zememerač nameral 6 rm 1 rs 1 rl, t. j.

$$6 \cdot 385 + 1 \cdot 105 + 1 \cdot 25 = 2\,310 + 105 + 25 = 2\,440\,(\mathrm{cm}).$$

Vzdialenosť od zámockej brány k rozprávkovému jazierku je teda $2\,440\,\mathrm{cm} = 24{,}4\,\mathrm{m}$. Prvý zememerač sa pomýlil o $2\,440 - 2\,410 = 30\,(\mathrm{cm})$.

---

3. *Štyria kamaráti Adam, Mojmír a dvojčatá Peter a Pavol získali na hodinách matematiky celkom 52 smajlíkov, každý aspoň 1. Pritom dvojčatá dokopy majú 33, ale najúspešnejší bol Mojmír. Koľko ich získal Adam?* (*M. Volfová*)

Riešenie. Všetkých smajlíkov dokopy je 52, pričom dvojčatá ich získali dokopy 33 a Adam aspoň jeden. Pre Mojmíra zostáva najviac $52 - 33 - 1 = 18$ smajlákov. Aby ich mal najviac zo všetkých, musí mať každé z dvojčiat nanajvýš 17 smajlíkov. To ale znamená, že ich Petr získal práve 17 a Pavel 16, alebo naopak. Keby mal totiž niektorý z nich menej než 16, druhý by musel mať viac ako 17, aby mali dokopy 33. Z toho tiež vyplýva, že Mojmír nemohol získať menej ako 18 smajlíkov (aby mal viac než hociktoré dvojča). Preto Mojmír získal práve 18 smajlíkov a na Adama zostáva iba jeden smajlík :-).

Iné riešenie. Vieme, že dvojčatá získali dokopy 33 smajlíkov a pritom každý aspoň jeden. Keby Peter získal 32 smajlíkov a Pavol jeden, musel by mať Mojmír aspoň 33, aby mal zo všetkých najviac. Potom by ale mali všetci dokopy aj s Adamom aspoň $33 + 33 + 1 = 67$ smajlíkov, čo nie je možné, pretože zo zadania vieme, že dokopy mali 52. Podobne, keby Peter získal 31 smajlíkov a Pavol 2, musel by mať Mojmír aspoň 32, dohromady s Adamom by mali aspoň $33 + 32 + 1 = 66$, čo je stále veľa… Podobnou úvahou sa dajú vylúčiť všetky možnosti rozdelenia smajlíkov medzi dvojčatami až na nasledujúci prípad: Peter 17, Pavol 16 (alebo naopak), potom Mojmír 18 a Adam 1.

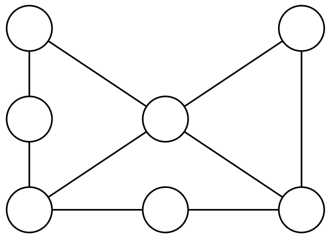
---

4. *Pán Tik a pán Tak predávali budíky v predajniach „Pred Rohom“ a „Za Rohom“. Pán Tik tvrdil, že „Pred Rohom“ predali o 30 budíkov viac ako „Za Rohom“, zatiaľ čo pán Tak tvrdil, že „Pred Rohom“ predali trikrát viac budíkov ako „Za Rohom“. Nakoniec sa ukázalo, že Tik aj Tak mali pravdu. Koľko budíkov predali v oboch predajniach celkom?* (*L. Hozová*)

Riešenie. Z Takovej informácie vieme, že ak počet budíkov predaných v predajni Za Rohom predstavuje jeden diel, tak počet budíkov predaných v predajni Pred Rohom predstavuje tri takéto diely. Z Tikovej informácie potom vyplýva, že dvom takýmto dielom zodpovedá rozdiel 30 budíkov. Počet budíkov v oboch predajniach zodpovedá štyrom dielom. Dokopy teda museli predať $30 + 30 = 60$ budíkov.

Poznámka. Jednému dielu zodpovedá 15 budíkov $(30 : 2 = 15)$, takže v predajni Za Rohom sa predalo 15 budíkov. V predajni Pred Rohom predali 45 budíkov, pretože $3 \cdot 15 = 45$. V oboch predajniach predali teda dokopy $15 + 45 = 60$ budíkov.

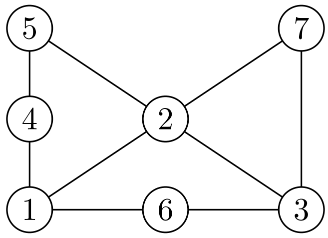
5. *Do krúžkov na obr. 1 doplňte čísla* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *a* 7 *tak, aby súčet čísel na každej vyznačenej línii bol rovnaký. Žiadne číslo pritom nesmie byť použité viackrát.*



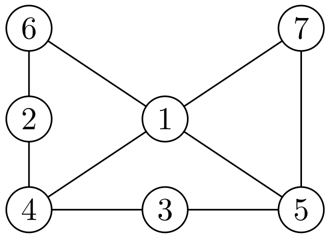
Obr. 1

(*M. Smitková*)

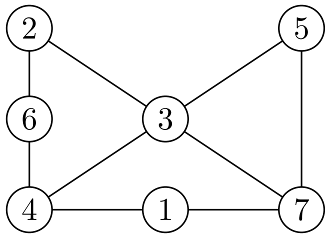
Riešenie. Skúšaním nachádzame tieto tri riešenia:



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Skúšanie môžeme začínať napr. vyplnením dvoch krúžkov na zvislej línii vpravo. Táto línia ako jediná obsahuje dve políčka, preto do nej patria skôr väčšie čísla.

Hodnotenie. Aj jediné správne riešenie bez komentára ohodnoťte „výborne“.

Poznámka. Súčet všetkých použitých čísel je $1+2+3+4+5+6+7 = 28$. Všimnime si krúžok v ľavom dolnom rohu. Vychádzajú z neho tri čiary a na každej z nich ležia ďalšie dva krúžky. Týmito čiarami máme pospájané všetky krúžky.

Zistíme, že číslo v ľavom dolnom rohu nemôže byť ľubovoľné. Súčet čísel vo zvyšných dvoch krúžkoch na každej z troch spomínaných čiar musí byť rovnaký. Trojnásobok tohto súčtu je preto rovnaký ako rozdiel medzi 28 a číslom v ľavom dolnom rohu. Preto v ľavom dolnom rohu môže byť jedine 1, 4 alebo 7.

Potom súčet zvyšných dvoch čísel na spomínaných čiarach musí byť po rade 9, 8 alebo 7 a súčet všetkých čísel na jednej čiare musí byť po rade 10, 12 alebo 14. Na základe týchto súčtov rozdelíme ostávajúce čísla do dvojíc a z každej dvojice vyberieme jedno tak, aby účet týchto troch bol takisto 10, 12 alebo 14. Tieto tri čísla budú ležať na zatiaľ neurčenej uhlopriečke. Podobným spôsobom vyberieme dvojicu čísel na pravú stranu štvorca. Takto získavame tri vyššie uvedené riešenia a zároveň máme overené, že žiadne ďalšie riešenie už nie je.

6. *Pani Šikovná čakala večer hostí. Najskôr pre nich pripravila 25 chlebíčkov. Potom spočítala, že by si každý hosť mohol zobrať dva, ale po troch by už na všetkých nevyšlo. Povedala si, že keby vyrobila ešte 10 chlebíčkov, mohol by si každý hosť vziať tri, ale štyri nie každý. To sa jej zdalo stále málo. Nakoniec prichystala dokopy 52 chlebíčkov. Každý hosť by si teda mohol vziať štyri chlebíčky, ale po päť by už na všetkých nevyšlo. Koľko hostí pani Šikovná čakala? Ona sama drží diétu a večer nikdy neje.*

(*L. Šimůnek*)

Riešenie. Najskôr pracujme s tou časťou zadania, kde sa uvažuje o 25 chlebíčkoch. Podľa nej pani Šikovná očakávala nanajvýš 12 hostí, pretože $25 : 2 = 12$, zvyšok 1, čo znamená, že 12 ľudí by si mohlo zobrať po dvoch chlebíčkoch, no ostal by už iba jediný. Takisto sa dá z tejto časti zistiť, že pani Šikovná čakala viac ako 8 hostí, pretože $25 : 3 = 8$, zvyšok 1, čo znamená, že pri 8 hosťoch by si všetci ôsmi mohli zobrať po troch chlebíčkoch. Zatiaľ teda pripadá do úvahy, že malo prísť 9, 10, 11 alebo 12 hostí.

Teraz uvažujme o tej časti zadania, v ktorej sa hovorí o 35 chlebíčkoch. Určíme, že pani Šikovná počítala maximálne s 11 hosťami, lebo $35 : 3 = 11$, zvyšok 2, a viac ako 8 hosťami, lebo $35 : 4 = 8$, zvyšok 3. Teda pani Šikovná mohla čakať 9, 10 alebo 11 hostí.

Ďalej pracujme len s úvahou s 52 chlebíčkami. Podľa nej pani Široká čakala nanajvýš 13 hostí, pretože $52 : 4 = 13$. Takisto vieme, že čakala viac ako 10 hostí, pretože $52 : 5 = 10$, zvyšok 2. Rátala teda s 11, 12 alebo 13 hosťami.

Vidíme, že so všetkými údajmi v zadaní sa zhoduje iba jediný počet hostí, a to 11.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom odseku predchádzajúceho riešenia určíme, že pani Šikovná mohla očakávať 9, 10, 11 alebo 12 hostí. Pre každý počet zistíme, či vyhovuje aj ďalším údajom z zadaní.

9 hostí: Pri 35 chlebíčkoch by si všetci mohli zobrať po tri chlebíčky, nevyšli by im štyri, lebo $9 \cdot 3 < 35$ a $9 \cdot 4 > 35$. Pri 52 chlebíčkoch by si každý mohol zobrať po štyri chlebíčky ale dokonca i po päť, pretože $9 \cdot 4 < 52$ i $9 \cdot 5 < 52$. Tento počet hostí preto zavrhneme.

10 hostí: Pri 35 chlebíčkoch by si všetci mohli zobrať po tri chlebíčky, ale nie štyri, lebo $10 \cdot 3 < 35$ a $10 \cdot 4 > 35$. Pri 52 chlebíčkoch by si každý mohol zobrať štyri chlebíčky, ale dokonca aj päť, lebo $10 \cdot 4 < 52$ i $10 \cdot 5 < 52$. Tento počet hostí tiež zavrhneme.

11 hostí: Pri 35 chlebíčkoch by si každý mohol zobrať po tri chlebíčky, ale nie po štyri, pretože $11 \cdot 3 < 35$ a $11 \cdot 4 > 35$. Pri 52 chlebíčkoch by si všetci mohli zobrať po štyri chlebíčky, no nie po päť, lebo $11 \cdot 4 < 52$ a $11 \cdot 5 > 52$. Tento počet hostí vyhovuje všetkým požiadavkam zadania.

12 hostí: Pri 35 chlebíčkoch by si nemohli všetci zobrať po troch chlebíčkoch, pretože $12 \cdot 3 > 35$. Tento počet hostí zavrhneme.

Pani Šikovná teda čakala 11 hostí.