2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

1. *Pán Vlk čakal na zastávke pred školou na autobus. Z okna počul slová učiteľa:*

„Aký povrch môže mať pravidelný štvorboký hranol, ak viete, že dĺžky všetkých jeho hrán sú v centimetroch vyjadrené celými číslami a že jeho objem je…“

Toto dôležité číslo pán Vlk nepočul, pretože práve prešlo okolo auto. Za chvíľu počul žiaka oznamujúceho výsledok $918\,\mathrm{cm}^2$. *Učiteľ na to povedal:*

„Áno, ale úloha má celkom štyri riešenia. Hľadajte ďalej.“

Viac sa pán Vlk už nedozvedel, lebo nastúpil do svojho autobusu. Keďže matematika bola vždy jeho hobby, vybral si v autobuse ceruzku a papier a po čase určil aj zvyšné tri riešenia učiteľovej úlohy. Spočítajte ich aj vy. (L. Šimůnek)

Riešenie. Premenné a a v sú prirodzené čísla a predstavujú hranu podstavy pravidelného štvorbokého hranola a jeho výšku. Pre rozmery, ktoré uvažoval hlásiaci sa žiak, platí

$$918 = 2a^2 + 4av = 2a \cdot (a + 2v),$$

po vydelení dvoma dostaneme

$$459 = a \cdot (a + 2v).$$

Budeme hľadať všetky dvojice a, v, ktoré vyhovujú tomuto vzťahu. Určíme teda všetky možné rozklady čísla 459 ($459 = 3^3 \cdot 17$) na súčin dvoch prirodzených čísel, z nich menšie bude a a väčšie bude $a + 2v$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, že takéto rozklady existujú štyri a každý vedie na celočíselné v. Pre všetky nájdené dvojice a, v potom spočítame objem, ktorý by učiteľ musel zadať, a jeho prvočíselný rozklad:

	a	$a+2v$	v	$a^2 \cdot v$
1. možnosť	1	459	229	$1^2 \cdot 229 = 229$
2. možnosť	3	153	75	$3^2 \cdot 75 = 3^3 \cdot 5^2$
3. možnosť	9	51	21	$9^2 \cdot 21 = 3^5 \cdot 7$
4. možnosť	17	27	5	$17^2 \cdot 5 = 17^2 \cdot 5$

Učiteľ prezradil, že zadaný objem vedie na štyri riešenia. Pri každom objeme v tabuľke určíme, ku koľkým riešeniam vedie, teda pre každý objem nájdeme všetky možné a:

	$a^2 \cdot v$	možné a
1. možnosť	229	1
2. možnosť	$3^3 \cdot 5^2$	1, 3, 5, 15
3. možnosť	$3^5 \cdot 7$	1, 3, 9
4. možnosť	$17^2 \cdot 5$	1, 17

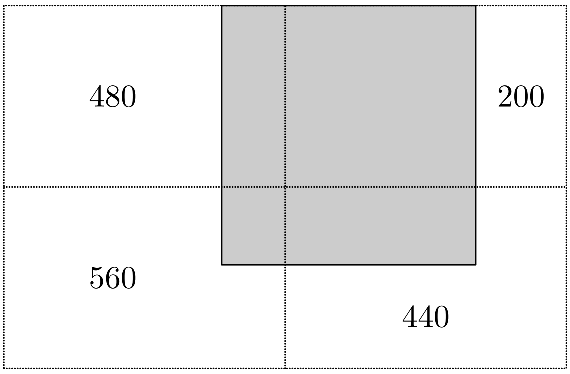
Vidíme, že jedine 2. možnosť vedie na štyri hranoly. Učiteľ teda zadal objem $3^3 \cdot 5^2 = 675\,(\mathrm{cm}^3)$ a prvý žiak uvažoval tieto rozmery: $a = 3\,\mathrm{cm}$, $v = 75\,\mathrm{cm}$. Nižšie uvádzame, aké ďalšie rozmery hranolov mali žiaci nájsť a aký povrch z nich mali vypočítať:

a	1	5	15
v	675	27	3
$2a^2 + 4av$	2 702	590	630

Učiteľ čakal na tieto ďalšie tri riešenia: $590\,\mathrm{cm}^2$, $630\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,702\,\mathrm{cm}^2$.

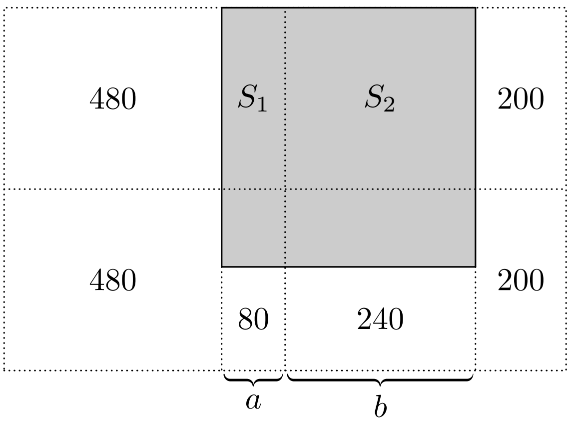
---

2. *Na obr. 1 sú bodkovanou čiarou znázornené hranice štyroch rovnako veľkých obdĺžnikových parciel. Sivou farbou je vyznačená zastavaná plocha. Tá má tvar obdĺžnika, ktorého jedna strana tvorí zároveň hranice parciel. Zapísané čísla vyjadrujú obsah nezastavanej plochy na jednotlivých parcelách, a to v* m^2*. Vypočítajte obsah celkovej zastavanej plochy.* (*L. Šimůnek*)



Obr. 1

Riešenie. Keď predĺžime na obr. 1 zvislé hranice zastavanej plochy, rozdelíme na oboch dolných parcelách voľnú plochu na dve časti. Obsahy vzniknutých obdĺžnikov ľahko odvodíme:



Obr. 2

Obdĺžniky s obsahmi $80\,\mathrm{m}^2$ a $240\,\mathrm{m}^2$ majú spoločnú stranu. Preto zvyšné strany obdĺžnikov, na obr. 2 označené a a b, musia mať dĺžky v takom istom pomere, v akom sú obsahy obdĺžnikov:

$$\frac{a}{b} = \frac{80}{240} = \frac{1}{3},$$

teda $b = 3a$. V parcelách, ktoré sú na obrázku hore, označíme obsahy zastavaných častí S_1 a S_2. Ide o dva obdĺžniky s jednou spoločnou stranou a ich ďalšie strany majú dĺžky a a $3a$. Obsahy obdĺžnikov musia byť v tom istom pomere ako tieto dĺžky, teda $S_2 = 3S_1$. Parcely na obr. 1 majú rovnaký obsah, preto

$$480 + S_1 = 3S_1 + 200,$$

po úprave dostaneme $S_1 = 140\,(\mathrm{m}^2)$. Obsah jednej parcely je $480 + 140 = 620\,(\mathrm{m}^2)$ a obsah všetkých štyroch je $4 \cdot 620 = 2\,480\,(\mathrm{m}^2)$. Keď z nej odčítame obsahy všetkých voľných plôch, dostaneme obsah zastavanej plochy:

$$2\,480 - 480 - 200 - 560 - 440 = 800\,(\mathrm{m}^2).$$

---

3. *Vĺčkovci lisovali jablkový mušt. Mali ho v dvoch rovnako objemných súdkoch, v oboch takmer rovnaké množstvo. Keby z prvého preliali do druhého 1 liter, mali by v oboch rovnako, ale to by ani jeden súdok nebol plný. Tak radšej preliali 9 litrov z druhého do prvého. Potom bol prvý súdok úplne plný a mušt v druhom zaplňal práve tretinu objemu. Koľko litrov muštu vylisovali, aký bol objem súdkov a koľko muštu v nich bolo pôvodne?* (M. Volfová)

Riešenie. Označme počet litrov v prvom súdku pred prelievaním x, v druhom y. Po preliatí jedného litra by bolo v prvom súdku $x - 1$ litrov, v druhom $y + 1$ litrov a platilo by

$$x - 1 = y + 1.$$

Po preliatí 9 litrov bolo v prvom súdku $x + 9$ litrov a bol plný, v druhom $y - 9$ litrov, čo tvorilo tretinu objemu súdka, teda tretinu toho, čo bolo v prvom súdku. Preto

$$x + 9 = 3 \cdot (y - 9).$$

Z prvej rovnice vyjadríme $x = y + 2$ a dosadíme do druhej: $y + 2 + 9 = 3y - 27$. Po úprave dostávame $y = 19$ a $x = 21$.

V prvom súdku bolo pôvodne 21 litrov a v druhom 19 litrov muštu, Vĺčkovci celkom vylisovali 40 litrov muštu. Objem každého z oboch súdkov bol 30 litrov.

---

4. *Pán Rýchly a pán Ťarbák v rovnakom čase vyštartovali na tú istú turistickú trasu, len pán Rýchly ju išiel zhora z horskej chaty a pán Ťarbák naopak od autobusu dolu v mestečku na chatu smerom nahor. Keď bolo 10 hodín, stretli sa na trase. Pán Rýchly sa ponáhľal a už o 12:00 bol v cieli. Naopak pán Ťarbák postupoval pomaly, a tak dorazil na chatu až o 18:00. O koľkej páni vyrazili na cestu, ak vieme, že každý z nich išiel celý čas svojou stálou rýchlosťou?* (M. Volfová)

Riešenie. Označme rýchlosť (v km/h) pána Rýchleho v_R a pána Ťarbáka v_T. Dobu (v hodinách) od štartu po ich stretnutie označíme x. Po stretnutie prešiel pán Rýchly zhora od chaty $x \cdot v_R$ (km), pán Ťarbák zdola od autobusu $x \cdot v_T$ (km). Pán Rýchly potom išiel ešte 2 hodiny dole k autobusu, prešiel $2 \cdot v_R$ (km), pán Ťarbák išiel ešte 8 hodín k chate nahor, teda prešiel $8 \cdot v_T$ (km).

Porovnaním zodpovedajúcich vzdialeností získame dve rovnice: vzdialenosť od miesta, kde sa páni stretli, k autobusu je $x \cdot v_T = 2 \cdot v_R$ (km), k chate $8 \cdot v_L = x \cdot v_R$ (km). Odtiaľ vyjadríme

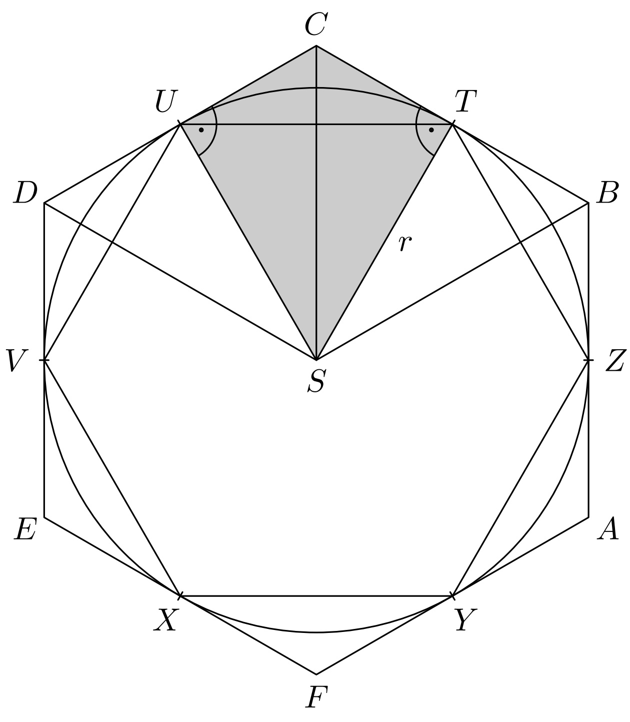
$$\frac{v_T}{v_R} = \frac{2}{x} = \frac{x}{8},$$

teda $x^2 = 16$ a $x = 4$. Od štartu po stretnutie o 10:00 išli obaja páni 4 hodiny, na cestu teda vyrazili o 6:00.

---

5. *Kružnici so stredom S a polomerom 12 cm sme opísali pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ a vpísali pravidelný šesťuholník $TUVXYZ$ tak, aby bod T bol stredom strany BC. Vypočítajte obsah a obvod štvoruholníka $TCUS$.* (M. Krejčová)

Riešenie. Kružnicu opísanú v zadaní nazveme k a jej polomer r, pričom platí $r = 12$ cm. Jej vzťahy k šesťuholníkom sa dajú popísať aj tak, že kružnica k je vpísaná pravidelnému šesťuholníku $ABCDEF$ a opísaná pravidelnému šesťuholníku $TUVXYZ$ (obr. 3). Ďalej si uvedomme, že pri zostrojovaní pravidelného šesťuholníka $TUVXYZ$ môžeme podmienke v zadaní, aby vrchol T ležal v strede strany BC, vyhovieť preto, že práve v strede strany BC je bod dotyku šesťuholníka $ABCDEF$ a kružnice k jemu vpísanej. Preto aj ostatné vrcholy šesťuholníka $TUVXYZ$ ležia v stredoch strán šesťuholníka $ABCDEF$.



Obr. 3

Pri riešení úlohy budeme vychádzať zo známej vlastnosti pravidelného šesťuholníka: ktorékoľvek dva jeho susedné vrcholy a stred kružnice jemu opísanej (resp. vpísanej) tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. Teda trojuholníky CSB a CSD sú rovnostranné, navyše majú spoločnú stranu CS, podľa ktorej sú osovo súmerné. Bod T je stredom strany BC trojuholníka CSB, a preto je aj pätou jeho výšky kolmej na stranu BC. Trojuholník CST je teda pravouhlý. Bod U, ktorý je stredom strany DC, je osovo súmerný s T podľa CS, teda trojuholníky CST a CSU sú zhodné.

K doriešeniu úlohy stačí poznať veľkosť $|TC|$, ktorú vypočítame podľa Pytagorovej vety v trojuholníku CST (pritom použijeme $|CS| = 2|TC|$):

$$\begin{aligned}
|CS|^2 &= |ST|^2 + |TC|^2,\\
4|TC|^2 &= r^2 + |TC|^2,\\
3|TC|^2 &= r^2,\\
|TC| &= \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Štvoruholník $TCUS$ je tvorený dvoma zhodnými trojuholníkmi, určíme jeho obsah:

$$S_{TCUS} = 2 \cdot S_{CST} = |TC| \cdot |ST| = \frac{r\sqrt{3}}{3} \cdot r = \frac{r^2\sqrt{3}}{3}.$$

Obvod štvoruholníka $TCUS$ je

$$o_{TCUS} = 2(|TC| + |ST|) = 2\left(\frac{r\sqrt{3}}{3} + r\right) = 2r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right).$$

Po dosadení $r = 12\,\text{cm}$ dôjdeme k výsledkom:

$$\begin{aligned}
S_{TCUS} &= 48\sqrt{3} \doteq 83{,}1\,(\text{cm}^2),\\
o_{TCUS} &= 8\sqrt{3} + 24 \doteq 37{,}9\,(\text{cm}).
\end{aligned}$$

---

6. *Peter a Pavol oberali v sade jablká a hrušky. V pondelok zjedol Peter o 2 hrušky viac ako Pavol a o 2 jablká menej ako Pavol. V utorok Peter zjedol o 4 hrušky menej ako v pondelok. Pavol zjedol v utorok o 3 hrušky viac ako Peter a o 3 jablká menej ako Peter. Pavol zjedol za oba dni 12 jabĺk a v utorok zjedol rovnaký počet jabĺk ako hrušiek. V utorok večer obaja chlapci zistili, že počet jabĺk, ktoré spolu za oba dni zjedli, je rovnako veľký ako počet spoločne zjedených hrušiek. Koľko jabĺk zjedol Peter v pondelok a koľko hrušiek zjedol Pavol v utorok?* (L. Hozová)

Riešenie. Označme x, y počty hrušiek a jabĺk, ktoré Pavol zjedol v pondelok. Podľa zadania postupne a trpezlivo zostavíme nasledujúcu tabuľku:

	pondelok	utorok
Pavol hrušiek	x	$x+1$
Pavol jabĺk	y	$12-y$
Peter hrušiek	$x+2$	$x-2$
Peter jabĺk	$y-2$	$15-y$

Pri vypĺňaní tabuľky sme však zatiaľ nevyužili nasledujúce informácie:

a) Pavol zjedol v utorok rovnaký počet jabĺk ako hrušiek,
b) počet všetkých spoločne zjedených jabĺk je rovnaký ako počet zjedených hrušiek.

Vďaka informácii b) zostavíme rovnicu, z ktorej po úprave získame hodnotu x:

$$\begin{aligned} y + (12 - y) + (y - 2) + (15 - y) &= x + (x + 1) + (x + 2) + (x - 2), \\ 25 &= 4x + 1, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Podľa informácie a) tiež zostavíme rovnicu, upravíme ju a dosadíme:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 12 - y, \\ y &= 11 - x = 5. \end{aligned}$$

Dosadením do príslušných políčok tabuľky zistíme, že Peter zjedol v pondelok 3 jablká a Pavol zjedol v utorok 7 hrušiek.

Pre kontrolu uvádzame tabuľku so všetkými dosadenými hodnotami:

	pondelok	utorok
Pavol hrušiek	6	**7**
Pavol jabĺk	5	7
Peter hrušiek	8	4
Peter jabĺk	**3**	10

Poznámka. Pri zostavovaní údajov v tabuľke sa dá postupovať rôzne a nepoužité informácie môžu byť rôzne od tých v predchádzajúcom postupe. Pri rovnakom označení neznámych tak môžeme získať iné dve rovnice, ktoré však pri správnom počítaní vedú k rovnakému výsledku. Navyše neznáme sa tiež dajú voliť rôzne, ale vždy sú aspoň dve. Rovnaký počet nepoužitých informácií potom určuje sústavu rovníc, ktorú následne riešime.

Iné riešenie. Ak označíme x počet jabĺk, ktoré Peter zjedol v pondelok, a y počet hrušiek, ktoré Pavol zjedol v utorok, potom tabuľka môže vyzerať takto:

	pondelok	utorok
Pavol hrušiek	$y - 1$	y
Pavol jabĺk	$12 - y$	y
Peter hrušiek	$y + 1$	$y - 3$
Peter jabĺk	x	$y + 3$

Pritom sme nepoužili nasledujúce informácie:

a) v pondelok zjedol Peter o 2 jablká menej ako Pavol,
b) počet všetkých spoločne zjedených jabĺk je rovnaký ako počet zjedených hrušiek.

Zodpovedajúce rovnice (po jednoduchej úprave) sú:

$$\begin{aligned} x + y &= 10, \\ -x + 3y &= 18, \end{aligned}$$

a jediným riešením tejto sústavy je $x = 3$ a $y = 7$.