2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z9*

1. *Koľko existuje dvojíc štvorciferných palindrómov, ktorých rozdiel je* 3674*? Palindróm je číslo, ktoré ostane rovnaké, keď ho napíšeme odzadu. Štvorciferný palindróm je teda také štvorciferné prirodzené číslo, ktoré má na mieste jednotiek rovnakú cifru ako na mieste tisícok a na mieste desiatok rovnakú cifru ako na mieste stoviek.* (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Označme jednotlivé cifry palindrómu písmenami. Skutočnosť, že dva štvorciferné palindrómy majú požadovaný rozdiel, môžeme zapísať takto:

$$\begin{array}{r} A\,B\,B\,A \\ -C\,D\,D\,C \\ \hline 3\;\;6\;\;7\;\;4 \end{array}$$

V stĺpci tisícok a v stĺpci jednotiek sa odčítavajú tie isté cifry. V stĺpci tisícok vidíme, že $A > C$. Preto v stĺpci jednotiek pri odčítaní nedochádza k prechodu cez desiatku a platí

$$A - C = 4. \tag{1}$$

V stĺpci desiatok a v stĺpci stoviek, kde sa odčítajú rovnaké cifry, dochádza k prechodu cez desiatku, pretože vo výsledku je na mieste desiatok cifra o 1 väčšia ako na mieste stoviek. Platí

$$10 + B - D = 7,$$

po úprave tejto rovnice dostaneme

$$D - B = 3. \tag{2}$$

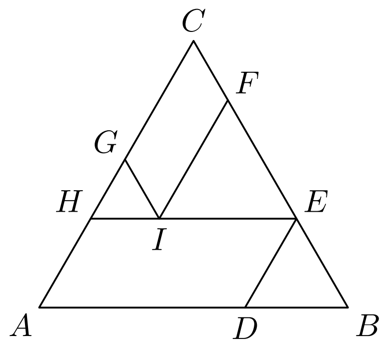
Ešte urobme rozbor stĺpca tisícov, aby sme sa presvedčili, že zadaný rozdiel umožňuje nájsť vyhovujúce dvojice palindrómov. Keďže pri odčítaní v stĺpci stoviek došlo k prechodu cez desiatku, musí byť vo výsledku na mieste tisícov cifra o 1 menšia ako na mieste jednotiek. Vidíme, že to je v zadanom rozdiele splnené.

V zadaní je štvorciferný palindróm definovaný ako štvorciferné prirodzené číslo určitých vlastností, preto $A \neq 0$ a $C \neq 0$. Ak má byť navyše splnený vzťah (1), môže byť A jedine jedna z cifier 9, 8, 7, 6, 5 a C je potom vždy o 4 menšie. Zo vzťahu (2) dostávame, že D môže byť rovné jedine cifrám 9, 8, 7, 6, 5, 4 alebo 3 a B je vždy o 3 menšie. Písmená A a C tak môžeme nahradiť piatimi rôznymi dvojicami cifier a písmena B a D siedmimi rôznymi dvojicami cifier. Tieto dvojice môžeme medzi sebou akokoľvek párovať, dohromady teda dostávame $5 \cdot 7 = 35$ rôznych dvojíc palindrómov so žiadanými vlastnosťami.

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie, v ktorých stĺpcoch dochádza k prechodom cez desiatku a v ktorých nie; 2 body za počty dvojíc A, C a B, D; 2 body za výsledok. (Riešenie, v ktorom sa za C chybne dosadzuje 0 a ktoré tak príde k výsledku $6 \cdot 7 = 42$, môžete ohodnotiť až 5 bodmi.)

2. *Na obr. 1 sú rovnostranné trojuholníky ABC, DBE, IEF a HIG. Obsahy trojuholníkov DBE, IEF a HIG sú v pomere $9 : 16 : 4$. V akom pomere sú*

1. *dĺžky úsečiek HI a IE,*
2. *obsahy trojuholníkov ABC a HEC?* (K. Pazourek)



Obr. 1

Riešenie. Pre dva rovnostranné trojuholníky s dĺžkami strán a, b platí, že pomer ich obsahov je $a^2 : b^2$. Naopak, ak je pomer obsahov $a^2 : b^2$, potom pomer strán je $a : b$. Toto tvrdenie sa dá zdôvodniť pravidlom pre dva podobné útvary alebo takisto explicitným výpočtom, pričom obsah rovnostranného trojuholníka so stranou a je $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$.

1. Ak obsahy trojuholníkov HIG a IEF sú v pomere $4 : 16$, potom pomer $|HI| : |IE|$ ich strán bude $2 : 4 = 1 : 2$.

2. Ak zvolíme jednotku $j = \frac{1}{2}|HI|$, tak $|IE| = |EF| = 4j$. V rovnostrannom trojuholníku HEC platí $|HI| + |IE| = |EF| + |FC|$, $|IE| = |EF|$, preto $|FC| = |HI| = 2j$. Ďalej z pomeru $9 : 16$ obsahov trojuholníkov DBE a IEF vyplýva, že $|BE| : |EF| = 3 : 4$, teda

$$|BE| = \frac{3}{4}|EF| = \frac{3}{4} \cdot 4j = 3j.$$

Preto strana BC trojuholníka ABC má veľkosť

$$|BC| = |BE| + |EF| + |FC| = 3j + 4j + 2j = 9j.$$

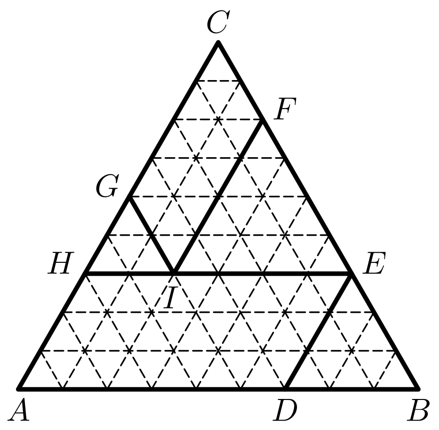
Podobne dĺžka strany HE trojuholníka HEC je

$$|HE| = |HI| + |IE| = 2j + 4j = 6j.$$

Pomer strán trojuholníka ABC a HEC je $9 : 6$, po skrátení $3 : 2$. Pomer obsahov týchto trojuholníkov je $3^2 : 2^2 = 9 : 4$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za úvodnú úvahu; 1 bod za prvú časť úlohy; po 1 bode za vyjadrenie strán trojuholníkov HEC a ABC; 2 body za výpočet pomerov obsahov trojuholníkov ABC a HEC. (Výsledné pomery nemusia byť uvedené v základnom tvare.)

Iné riešenie. Rozdeľme trojuholník ABC na rovnostranné trojuholníčky s dĺžkou strany $\frac{1}{2}|HI| = 1j$. Pomer $9 : 16 : 4$ obsahov trojuholníkov DBE, IEF, HIG zodpovedá takisto pomeru počtov týchto trojuholníčkov v príslušných trojuholníkoch. Keďže trojuholník HIG je rozdelený na 4 trojuholníčky, trojuholníky IEF a DBE musia pozostávať zo 16 a 9 trojuholníčkov.



Obr. 2

Z obr. 2 vyplýva nasledujúce:

1. Pomer $|HI| : |IE|$ je $2j : 4j = 1 : 2$.

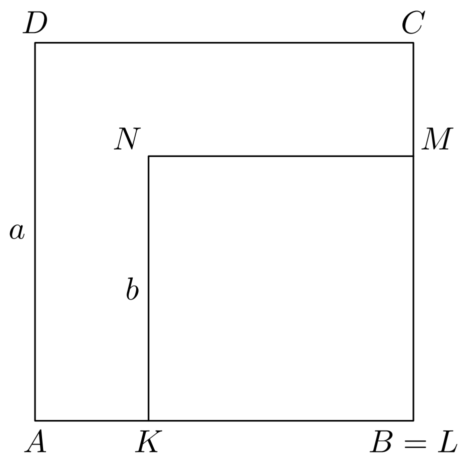
2. Pomer $S_{ABC} : S_{HEC}$ je zhodný s pomerom počtov trojuholníčkov obsiahnutých v týchto trojuholníkoch, teda $81 : 36 = 9 : 4$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za rozdelenie trojuholníkov HIG a IEF na trojuholníčky; 1 bod za výpočet pomeru $|HI| : |IE|$; 2 body za rozdelení zvyšnej plochy trojuholníka ABC na trojuholníčky; 2 body za výpočet pomeru $S_{ABC} : S_{HEC}$. (Výsledné pomery nemusia byť uvedené v základnom tvare.)

---

3. *Dané sú štvorce $ABCD$ a $KLMN$. Dĺžky strán oboch štvorcov sú v centimetroch vyjadrené celým číslom. Bod K je vnútorným bodom úsečky AB, bod L leží v bode B a bod M je vnútorným bodom úsečky BC. Obsah šesťuholníka $AKNMCD$ je* $225\,\mathrm{cm}^2$. *Aký môže byť obvod tohto šesťuholníka? Nájdite všetky možnosti.* (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Dĺžku strany štvorca $ABCD$ označíme a a dĺžku strany štvorca $KLMN$ označíme b, obe v centimetroch, pozri obr. 3. Cieľom úlohy je nájsť obvod šesťuholníka $AKNMCD$, a ten je rovnaký ako obvod štvorca $ABCD$, t. j. $4a$.



Obr. 3

Obsah šesťuholníka $AKNMCD$ je rovný

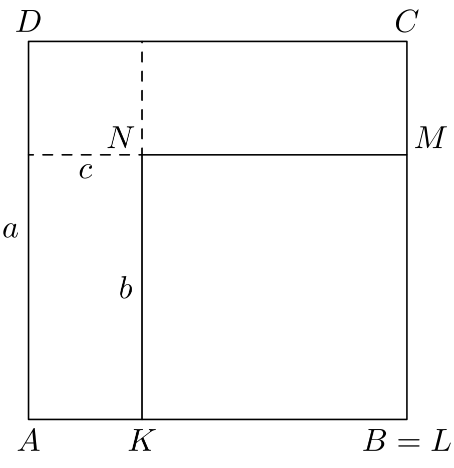
$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) = 225.$$

Keďže podľa zadania je bod K vnútorným bodom úsečky AB a $L = B$, je jasné, že $b \neq 0$ a $b < a$. Činitele $a-b$ a $a+b$ sú teda dve rôzne prirodzené čísla. V tabuľke nižšie uvádzame všetky rozklady čísla 225 na súčin dvoch rôznych prirodzených čísel (pri ich hľadaní nám pomôže rozklad čísla 225 na prvočinitele: $225 = 3^2 \cdot 5^2$). V tabuľke neuvádzame konkrétne hodnoty a a b, pretože ich pri riešení úlohy nepotrebujeme. Avšak v treťom stĺpci, kde sčítaním činiteľov $a-b$ a $a+b$ dostávame $2a$, kontrolujeme, či sme získali párne číslo, teda či a je celé číslo. Ak a je celé číslo, uvádzame vo štvrtom stĺpci hodnotu $4a$ ako možný obvod šesťuholníka $AKNMCD$.

$a-b$	$a+b$	$2a$	$4a$
1	225	226	452
3	75	78	156
5	45	50	100
9	25	34	68

Úloha má štyri riešenia: obvod šesťuholníka $AKNMCD$ môže byť 68 cm, 100 cm, 156 cm a 452 cm.

Iné riešenie. Dĺžku strany štvorca $ABCD$ označíme a a dĺžku strany štvorca $KLMN$ označíme b. Šesťuholník $AKNMCD$ sa dá bezo zvyšku rozdeliť na dva rovnaké obdĺžniky a štvorec, ktorého stranu označíme c, všetko v centimetroch, pozri obr. 4.



Obr. 4

Keďže podľa zadania je bod K vnútorným bodom úsečky AB a $L = B$, je zrejmé, že $b > 0$ a $c > 0$. Dĺžky a, b sú podľa zadania celé čísla, dĺžka c takisto, pretože $c = a-b$.

Obsah šesťuholníka $AKNMCD$ môžeme vyjadriť takto:

$$225 = 2bc + c^2.$$

Do tejto rovnice budeme za c postupne dosadzovať prirodzené čísla a vždy určíme, či b vychádza takisto prirodzené číslo. Tento postup ukazuje nasledujúca tabuľka, v ktorej vynechávame overovanie všetkých párnych c. Ak by totiž c bolo párne, z vyššie uvedenej rovnice by výraz $2bc$ vyšiel nepárny a b by tak nemohlo byť celé číslo.

c	$2bc = 225 - c^2$	$b = 2bc : 2c$
1	224	112
3	216	36
5	200	20
7	176	176 nie je deliteľné číslom 7
9	144	8
11	104	104 nie je deliteľné číslom 11
13	56	56 nie je deliteľné číslom 13
15	0	0

Už sme uviedli, že $b > 0$, a preto posledný riadok nevedie k riešeniu úlohy. V hľadaní možných riešení ďalej nepokračujeme, pretože b by evidentne vychádzalo záporné. Úloha má teda práve štyri riešenia. Požadovaný obvod šesťuholníka $AKNMCD$ vypočítame ako $4b + 4c$. Obvod daného šesťuholníka teda môže byť 68 cm, 100 cm, 156 cm alebo 452 cm.

Návrh hodnotenia. Za každý výsledný obvod 1 bod; 2 body za vysvetlený postup, ktorý musí ukazovať, že ďalšie riešenia nie sú.

---

4. *Martina si vymyslela postup na výrobu číselnej postupnosti. Začala číslom* 128. *Z neho odvodila ďalší člen postupnosti takto:* $8^2 + 5 = 64 + 5 = 69$. *Potom pokračovala rovnakým spôsobom a z čísla* 69 *dostala* $9^2 + 5 = 81 + 5 = 86$. *Vždy teda z predchádzajúceho člena postupnosti vezme cifru na mieste jednotiek, umocní ju na druhú a k tejto mocnine pripočíta konštantu* 5.

1. *Aké je 2011. číslo tejto postupnosti?*
2. *Martina opäť začala číslom* 128, *ale namiesto čísla* 5 *zvolila ako konštantu iné prirodzené číslo. Tentoraz jej na 2011. mieste vyšlo číslo* 16. *Akú konštantu zvolila v tomto prípade?*

(*M. Dillingerová*)

Riešenie. Pri vytváraní ďalšieho čísla v postupnosti využívame z predchádzajúceho čísla iba cifru na mieste jednotiek. Keďže cifier je iba desať, po niekoľkých číslach postupnosti sa musia začať čísla opakovať (ale nie nutne od prvého, t. j. od čísla 128).

1. Budeme postupne vypisovať čísla Martininej postupnosti, a to tak dlho, pokiaľ sa nezačnú opakovať:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: 69,
- 3. číslo: 86,
- 4. číslo: $6^2 + 5 = 41$,

- 5. číslo: $1^2 + 5 = 6$,
- 6. číslo: $6^2 + 5 = 41$,
- 7. číslo: $1^2 + 5 = 6$,
- atď.

Je zrejmé, že od 4. čísla sa v postupnosti pravidelne striedajú čísla 41 a 6. Číslo 41 sa vyskytuje vždy na párnom (počnúc štvrtým), číslo 6 vždy na nepárnom mieste (počnúc piatym). My hľadáme 2011. číslo. Pretože 2011 je nepárne, je na tomto mieste číslo 6.

2. Číslo 16 vzniklo ako súčet druhej mocniny jednociferného čísla (číslica na mieste jednotiek predchádzajúceho čísla) a neznámej konštanty. Predchádzajúce číslo môže mať na mieste jednotiek jedine číslicu 0 alebo 1 alebo 2 alebo 3, takže hľadaná konštanta môže byť (postupne) 16, 15, 12 alebo 7. Keby totiž bola na mieste jednotiek predchádzajúceho čísla číslica 4 alebo väčšia, nebola by hľadaná konštanta prirodzené číslo.

Teraz vyskúšame, ktorá z konštánt 16, 15, 12 a 7 vyhovuje zadaniu. Postup je analogický postupu z 1. časti úlohy.

a) Konštanta 16:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 16 = 80$,
- 3. číslo: $0^2 + 16 = 16$,
- 4. číslo: $6^2 + 16 = 52$,
- 5. číslo: $2^2 + 16 = 20$,
- 6. číslo: $0^2 + 16 = 16$,
- 7. číslo: $6^2 + 16 = 52$,
- atď.

Od 3. čísla sa v postupnosti opakujú čísla 16, 52 a 20. Zameráme sa len na príslušných 2009 čísel (t. j. 3. až 2011.). Keďže 2009 : 3 = 669, zvyšok 2, bude na 2011. mieste druhé z opakujúcich sa čísel, t. j. číslo 52. Konštanta 16 teda požiadavkám zo zadania nevyhovuje.

b) Konštanta 15:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 15 = 79$,
- 3. číslo: $9^2 + 15 = 96$,
- 4. číslo: $6^2 + 15 = 51$,
- 5. číslo: $1^2 + 15 = 16$,
- 6. číslo: $6^2 + 15 = 51$,
- atď.

Od 4. čísla sa v postupnosti striedajú čísla 51 a 16; číslo 51 na párnych miestach, číslo 16 na nepárnych miestach. To znamená, že na 2011. mieste (t. j. nepárnom mieste) bude číslo 16. Číslo 15 môže byť hľadaná konštanta.

c) Konštanta 12:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 12 = 76$,
- 3. číslo: $6^2 + 12 = 48$,
- 4. číslo: $8^2 + 12 = 76$,
- atď.

Od 2. čísla sa v postupnosti striedajú čísla 76 a 48, takže číslo 16 v tejto postupnosti vôbec nie je. Konštanta 12 teda nevyhovuje.

d) Konštanta 7:

- 1. číslo: 128,
- 2. číslo: $8^2 + 7 = 71$,
- 3. číslo: $1^2 + 7 = 8$,
- 4. číslo: $8^2 + 7 = 71$,
- atď.

Od 2. čísla sa v postupnosti striedajú čísla 71 a 8, takže číslo 16 sa nevyskytuje ani v tejto postupnosti. Konštanta 7 teda takisto nevyhovuje.

V priebehu riešenia sme našli len jediné vyhovujúce číslo a to číslo 15, ktoré si Martina zvolila ako novú konštantu.

Iné riešenie 2. časti. Neznáma konštanta je nejaké prirodzené číslo. Nemôžeme vyskúšať všetky prirodzené čísla, ale pritom potrebujeme mať istotu, že nájdeme všetky riešenia úlohy. Ako už bolo predtým spomenuté pri riešení 1. časti, každé číslo v postupnosti ovplyvňuje len cifra na mieste jednotiek predchádzajúceho čísla a pripočítaná konštanta. Preto napr. pri použití konštánt 1 a 11 dostaneme síce rôzne postupnosti, ale zodpovedajúce si čísla budú mať vždy rovnakú cifru na mieste jednotiek. Rovnaké cifry na mieste jednotiek budú vychádzať pre ľubovoľné konštanty zo skupiny 1, 11, 21, 31, ... Podobne pri použití konštanty zo skupiny 2, 12, 22, 32, ... alebo 3, 13, 23, 33, ... atď.

Najprv preto určíme, s ktorou skupinou konštánt dostávame na mieste jednotiek cifru 6, preto sa sústredíme na 2011. číslo v zodpovedajúcej postupnosti. Za týmto účelom stačí preveriť iba postupnosti určené konštantami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10.

konštanta	postupnosť
1	128, 65, 26, 37, 50, 1, 2, 5, 26, ...
2	128, 66, 38, 66, ...
3	128, 67, 52, 7, ...
4	128, 68, ...
5	128, 69, 86, 41, 6, 41, ...
6	128, 70, 6, 42, 10, ...
7	128, 71, 8, ...
8	128, 72, 12, ...
9	128, 73, 18, ...
10	128, 74, 26, 46, ...

Číslica 6 sa na mieste jednotiek objavuje len v postupnostiach určených konštantou 1, 2, 5, 6 a 10. Tieto prípady teraz preberieme podrobnejšie.

a) Konštanta 1. V tejto postupnosti sa od 3. čísla na mieste jednotiek opakujú po rade cifry 6, 7, 0, 1, 2, 5. Zamerajme sa len na príslušných 2009 čísel (t. j. 3. až 2011.).

Pretože $2009 : 6 = 334$, zvyšok 5, bude medzi nimi 334 úplných šestíc čísel (končiacich 6, 7, 0, 1, 2, 5) a z nasledujúcej šestice prvých päť. To znamená, že 2011. číslo postupnosti má na mieste jednotiek cifru 2. Takže konštanta, ktorú Martina pripočítala, nebola zo skupiny konštánt končiacich cifrou 1.

b) Konštanta 2. Na mieste jednotiek sa striedajú po rade cifry 8 a 6. Keďže číslo 2011 je nepárne, bude na mieste jednotiek príslušného čísla postupnosti cifra 8. Takže konštanta, ktorú Martina pripočítala, nebola ani z tejto skupiny.

c) Konštanta 5. Od 3. čísla sa striedajú na mieste jednotiek po rade cifry 6 a 1; cifra 6 pri číslach na nepárnych miestach, cifra 1 pri číslach na párnych miestach. Keďže číslo 2011 je nepárne, bude na mieste jednotiek príslušného čísla postupnosti cifra 6. Takže konštanta, ktorú Martina pripočítala, mohla byť z tejto skupiny.

Z predchádzajúceho, t. j. 2010. čísla pripočítame 1 k hľadanej konštante, čím dostaneme uvedené číslo 16. Martina teda mohla pripočítať konštantu $16 - 1 = 15$.

d) Konštanta 6. Počínajúc 2. číslom sa na mieste jednotiek opakujú po rade cifry 0, 6 a 2. Zameráme sa len na príslušných 2010 čísel (t. j. 2. až 2011.). Keďže $2010 : 3 = 670$ (bezo zvyšku), budú tvoriť 670 úplných trojíc čísel (končiacich 0, 6 a 2). To znamená, že 2011. číslo postupnosti má na mieste jednotiek cifru 2 a že Martina nepripočítala konštantu z tejto skupiny.

e) Konštanta 10. Na mieste jednotiek sa počínajúc 3. číslom vyskytuje len číslica 6. Takže konštanta, ktorú Martina pripočítala, by zatiaľ mohla byť aj z tejto skupiny.

Z predchádzajúceho, t. j. 2010. čísla pripočítame $6^2 = 36$ k hľadanej konštante, čím máme dostať číslo 16. Toho sa dá docieliť jedine odčítaním (nie pripočítaním) prirodzeného čísla, takže Martina nemohla pripočítavať konštantu z tejto skupiny.

Jedine v odseku c) sme našli vhodnú konštantu, ktorú mohla Martina pripočítať a bolo číslo 15.

Poznámka. Namiesto konštanty 10 môžeme preverovať konštantu 0. Tá síce nie je prirodzeným číslom (teda ona sama nemôže byť hľadaným riešením), ale patrí do rovnakej skupiny ako 10 a počítanie je s ňou jednoduchšie.

Návrh hodnotenia. 1 bod za úvahu o opakovaní cifier na mieste jednotiek (vrátane zdôvodnenia); 2 body za nájdenie čísla 6 v prvej časti a vysvetlenie postupu; 3 body za nájdenie konštanty 15 a príslušné zdôvodnenie. Ak riešiteľ po nájdení konštanty 15 ďalej prestane hľadať, udeľte mu nanajvýš 5 bodov.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení obvodných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 21. februára.