2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*

---

1. *Usporiadateľom výstavy „Na Mesiac a ešte ďalej" sa po prvom výstavnom dni zdalo, že málo ľudí si kúpilo na pamiatku leták o rakete Apollo 11. Preto znížili jeho cenu o 12 centov. Tým sa síce druhý deň zvýšil počet kupcov letáku o 10 %, ale celková denná tržba za letáky sa znížila o 5 %. Koľko centov stál leták Apollo 11 po zľave?*
(M. Petrová)

Riešenie. Informácie zo zadania usporiadame do nasledujúcej tabuľky:

	prvý deň	druhý deň
počet kupcov	n	$1{,}1n$
cena letáku (v centoch za osobu)	$x+12$	x
celková denná tržba (v centoch)	$n(x+12)$	$1{,}1nx$, resp. $0{,}95n(x+12)$

Z posledného políčka tabuľky zostavíme rovnicu, ktorú (za predpokladu $n > 0$) vyriešime:

$$\begin{aligned} 1{,}1nx &= 0{,}95n(x+12), \\ 1{,}1x &= 0{,}95x + 11{,}4, \\ 0{,}15x &= 11{,}4, \\ x &= 76. \end{aligned}$$

Cena letáka po zľave bola 76 centov (0,76 €).

Návrh hodnotenia. 3 body za zostavenie tabuľky alebo jej obdobu, z toho 1 bod za informácie v prvých dvoch riadkoch pod záhlavím a 2 body za informácie v poslednom riadku; 2 body za zostavenie a vyriešenie rovnice; 1 bod za výsledok.

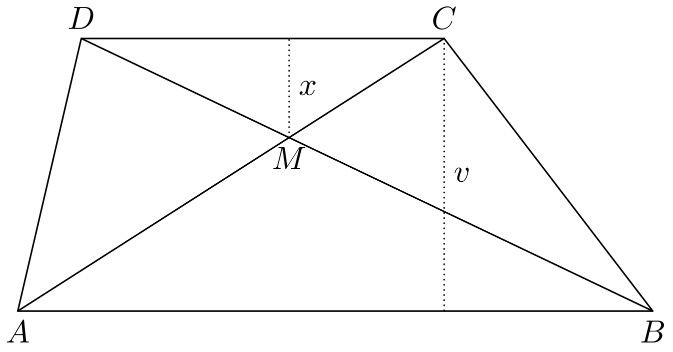
Ak riešiteľ uvedie vo svojej práci variantu, že prvý deň nikto leták nekúpil, t. j. $n = 0$, a že cena letáku po zľave mohla byť akákoľvek, nedá sa to uznať ako kompletné riešenie úlohy. Ak riešiteľ nenájde riešenie pre $n > 0$ ale má zostavenú správnu rovnicu, udeľte mu maximálne 4 body.

Pokiaľ riešiteľ variantu pre $n = 0$ pridá k správnemu riešeniu, body mu za to nestrhávajte.

---

2. *Lichobežník $ABCD$, v ktorom strana AB je rovnobežná so stranou CD, je rozdelený uhlopriečkami, ktoré sa pretínajú v bode M, na štyri časti. Určte jeho obsah, keď viete, že trojuholník AMD má obsah $8\,\mathrm{cm}^2$ a trojuholník DCM má obsah $4\,\mathrm{cm}^2$.*
(M. Volfová)

Riešenie. Uhly BMA a DMC majú rovnakú veľkosť, lebo sú vrcholové. Uhly ABM a CDM majú rovnakú veľkosť, pretože sú striedavé. Trojuholníky ABM a CDM sú teda podobné (podľa vety *uu*). Postupne zistíme pomer obsahov týchto dvoch trojuholníkov.



Obr. 1

Výšku lichobežníka označme v a výšku trojuholníka CDM kolmú na stranu CD označme x (obr. 1). Pre obsahy trojuholníkov CDM a CDA platí

$$S_{CDM} = \frac{1}{2}|CD| \cdot x = 4\,(\mathrm{cm}^2),$$
$$S_{CDA} = \frac{1}{2}|CD| \cdot v = 12\,(\mathrm{cm}^2).$$

Porovnaním oboch výrazov zisťujeme, že $v = 3x$. Výška trojuholníka ABM kolmá na stranu AB je podľa obrázka rovná $v-x = 3x-x = 2x$. Podobné trojuholníky CDM a ABM teda majú zodpovedajúce si výšky v pomere $1 : 2$, obsahy týchto trojuholníkov sú preto v pomere $1^2 : 2^2$, t. j. $1 : 4$. Obsah trojuholníka ABM je

$$S_{ABM} = 4 \cdot S_{CDM} = 4 \cdot 4 = 16\,(\mathrm{cm}^2).$$

K vyriešeniu úlohy ostáva určiť obsah trojuholníka MBC. Z obrázka jednoducho odvodíme vzťahy

$$S_{AMD} = S_{ABD} - S_{ABM},$$
$$S_{MBC} = S_{ABC} - S_{ABM},$$

a pretože $S_{ABC} = S_{ABD}$, platí

$$S_{MBC} = S_{AMD} = 8\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah lichobežníka $ABCD$ získame sčítaním obsahov jednotlivých trojuholníkov:

$$4 + 8 + 16 + 8 = 36\,(\mathrm{cm}^2).$$

Iné riešenie. Trojuholníky CDA a CDM majú spoločnú stranu CD. Pretože ich obsahy sú v pomere $3 : 1$, musia byť aj ich výšky kolmé na stranu CD v pomere $3 : 1$. Pokiaľ prvú z týchto výšok označíme v, bude druhá z nich rovná $\frac{1}{3}v$. Výška trojuholníka ABM kolmá na stranu AB je rovná rozdielu uvedených výšok, teda $v - \frac{1}{3}v = \frac{2}{3}v$.

Trojuholníky ABD a ABM majú spoločnú stranu AB a práve sme ukázali, že ich výšky kolmé na túto stranu sú v pomere $3 : 2$. V rovnakom pomere musia byť aj obsahy týchto trojuholníkov. Zo zadania vieme, že rozdiel obsahov je $8\,\mathrm{cm}^2$, obsah trojuholníka ABD je teda $3 \cdot 8 = 24\,(\mathrm{cm}^2)$ a obsah trojuholníka ABM je $2 \cdot 8 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$.

Na určenie obsahu lichobežníka potrebujeme ešte poznať obsah trojuholníka MBC. Trojuholníky CDA a CDB majú spoločnú stranu CD a zhodujú sa aj vo výške kolmej na túto stranu, preto musia byť ich obsahy zhodné. Trojuholník CDM tvorí spoločnú časť týchto trojuholníkov, zostávajúca časť trojuholníka CDA musí mať rovnaký obsah ako zostávajúca časť trojuholníka CDB. Teda obsah trojuholníka DAM, ktorý je podľa zadania $8\,\mathrm{cm}^2$, je rovný obsahu trojuholníka MBC.

Teraz už poznáme obsahy všetkých štyroch častí lichobežníka $ABCD$; obsah tohto lichobežníka je

$$4 + 8 + 16 + 8 = 36\,(\mathrm{cm}^2).$$

Návrh hodnotenia. 2 body za obsah trojuholníka MBC; 1 bod za zistenie pomerov výšok trojuholníkov CDM a CDA; 1 bod za určenie zodpovedajúcej výšky trojuholníka ABM; 1 bod za obsah trojuholníka ABM; 1 bod za správny záver.

---

3. *Cyril a Mirka počítali zo zbierky tú istú úlohu. Zadané boli dĺžky hrán kvádra v milimetroch a úlohou bolo vypočítať jeho objem a povrch. Cyril najskôr previedol zadané dĺžky na centimetre. Počítalo sa mu tak ľahšie, pretože aj po prevode boli všetky dĺžky vyjadrené celými číslami. Obom vyšli správne výsledky, Mirke v* mm^3 *a* mm^2*, Cyrilovi v* cm^3 *a* cm^2*. Mirkin výsledok v* mm^3 *bol o* 17 982 *väčší ako Cyrilov výsledok v* cm^3*. Mirkin výsledok v* mm^2 *bol o* 5 742 *väčší ako Cyrilov výsledok v* cm^2*. Určte dĺžky hrán kvádra.* (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Zadané dĺžky v cm označíme a, b, c. Tieto isté dĺžky v mm sú potom $10a$, $10b$, $10c$. Vyjadríme objemy a povrchy vypočítané Cyrilom a Mirkou:

$$\begin{aligned}
V_C &= abc,\\
V_M &= 10a \cdot 10b \cdot 10c = 1000abc,\\
S_C &= 2(ab + bc + ca),\\
S_M &= 2(10a \cdot 10b + 10b \cdot 10c + 10c \cdot 10a) = 200(ab + bc + ca).
\end{aligned}$$

Podľa zadaných rozdielov zostavíme rovnice

$$\begin{aligned}
V_M - V_C &= 999abc = 17\,982,\\
S_M - S_C &= 198(ab + bc + ca) = 5\,742,
\end{aligned}$$

ktoré upravíme:

$$\begin{aligned}
abc &= 18,\\
ab + bc + ca &= 29.
\end{aligned}$$

Nájdeme všetky prípustné riešenia prvej rovnice, teda všetky možné rozklady čísla 18 na súčin troch prirodzených čísel. Pri každej z týchto možností skontrolujeme, či platí aj druhá rovnica (uvažujeme iba $a \leqq b \leqq c$):

a	b	c	$ab + bc + ca$
1	1	18	$1 + 18 + 18 = 37$
1	2	9	$2 + 18 + 9 = \mathbf{29}$
1	3	6	$3 + 18 + 6 = 27$
2	3	3	$6 + 9 + 6 = 21$

Tabuľka ukazuje jediné riešenie vyhovujúce obom rovniciam, hrany zadaného kvádra teda majú dĺžky 10 mm, 20 mm a 90 mm.

Iné riešenie. Prirodzené číslo vyjadrujúce objem kvádra v cm^3 je tisíckrát menšie ako číslo vyjadrujúce objem v mm^3. Podobne číslo vyjadrujúce povrch v cm^2 je stokrát menšie ako číslo vyjadrujúce povrch v mm^2. Zadanie úlohy zapísané pomocou algebrogramu vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{r} JK000 \\ -\quad JK \\ \hline 17982 \end{array} \qquad \begin{array}{r} XY00 \\ -\quad XY \\ \hline 5742 \end{array}$$

Pri riešení postupujeme sprava a vidíme, že písmeno sa dá nahradiť cifrou vždy jediným možným spôsobom. (Pri zostavovaní algebrogramu bolo jasné, že menšenec má mať rovnaký počet číslic ako rozdiel, a to preto, že menšiteľ je o niekoľko rádov menší ako menšenec a zadaný rozdiel nezačína číslicou 9.)

Algebrogramy majú jediné riešenie: $J = 1$, $K = 8$, t. j. $V_C = 18\,(\mathrm{cm}^3)$, a $X = 5$, $Y = 8$, t. j. $S_C = 58\,(\mathrm{cm}^2)$. Ďalej pokračujeme tabuľkou rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Návrh hodnotenia. 1 bod za $V_C = 18$; 1 bod za $S_C = 58$, prípadne za $ab + bc + ca = 29$; 1 bod za zdôvodnenie postupu pri hľadaní objemu a povrchu; 2 body za všetky možné rozklady čísla 18; 1 bod za určenie správneho rozkladu.

---

4. *Na tabuli sú napísané čísla* 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ *a* $\frac{1}{6}$. *Na tabuľu môžeme pripísať súčet alebo súčin ľubovoľných dvoch čísel z tabule. Je možné takýmto pripisovaním dosiahnuť, aby sa na tabuli objavilo číslo*

$$\text{a)}\ \frac{1}{60};\qquad \text{b)}\ \frac{2011}{375};\qquad \text{c)}\ \frac{1}{7}?$$

(*V. Bachratá, J. Mazák*)

Riešenie. a) Áno, na tabuľu môžeme napísať číslo $\frac{1}{60}$. Napríklad tak, že pripíšeme číslo $\frac{1}{10}$, ktoré získame ako súčin čísel už napísaných: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$. A potom napíšeme číslo $\frac{1}{60}$, lebo je priamo súčinom $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}$.

b) Áno, na tabuľu môžeme napísať číslo $\frac{2011}{375}$. Najprv ukážeme, že na tabuľu môžeme napísať číslo $\frac{1}{375}$. To sa dá rozložiť na súčin čísel, ktoré sú na tabuli od začiatku:

$$\frac{1}{375} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}.$$

Vidíme teda, že k pôvodným číslam môžeme postupne pripísať čísla

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{75} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{15} \quad \text{a} \quad \frac{1}{375} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{75}.$$

K číslu $\frac{1}{375}$ môžeme pripísať ešte jedno také isté a síce ako súčin už napísaných čísel 1 a $\frac{1}{375}$. Sčítaním $\frac{1}{375}$ a $\frac{1}{375}$ dostaneme $\frac{2}{375}$ a postupným pripočítavaním $\frac{1}{375}$ tak môžeme dôjsť k akémukoľvek zlomku, ktorý má v menovateli 375 a v čitateli prirodzené číslo. Teda môžeme dôjsť aj k číslu $\frac{2011}{375}$.

c) Nie, na tabuľu nemôžeme napísať číslo $\frac{1}{7}$. Povolené sú jedine operácie sčítania a násobenia zlomkov. Ukážeme, aký majú tieto operácie vplyv na menovateľ. (Zanedbáme, že počas týchto operácii môžeme zlomky aj krátiť. Na náš záver toto zanedbanie nebude mať vplyv.)

- Pokiaľ násobíme dva zlomky, je v menovateli výsledku súčin menovateľov pôvodných zlomkov.
- Keď sčítame dva zlomky, je v menovateli výsledku súčin, respektíve najmenší spoločný násobok menovateľov pôvodných zlomkov.

V prvočíselnom rozklade súčinu, poprípade najmenšieho menovateľa násobku dvoch čísel nemôže byť prvočíslo, ktoré nebolo v prvočíselnom rozklade žiadneho z pôvodných dvoch čísel. Takže nech by sme robili akékoľvek povolené operácie, nikdy nedostaneme menovateľ, v ktorého rozklade je prvočíslo, ktoré dovtedy nebolo v rozklade žiadneho napísaného menovateľa. Keďže žiadne z menovateľov, ktoré máme na začiatku k dispozícii, nemá vo svojom prvočíselnom rozklade 7, nedokážeme dôjsť k $\frac{1}{7}$.

Návrh hodnotenia. V časti a) udeľte 1 bod za zdôvodnenú odpoveď, pričom oceňte aj tvrdenie: „Dá sa to, lebo $\frac{1}{60} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$."

V časti b) udeľte 2 body za popis akéhokoľvek postupu vedúceho k $\frac{2011}{375}$. (Pokiaľ postup nie je uvedený, môžete udeliť jeden bod za postreh, že v čitateli sa dá získať vďaka sčítaniu akékoľvek prirodzené číslo.)

V časti c) udeľte celkom 3 body, z toho 2 body za vysvetlenie, aký má na menovateľ vplyv násobenie a aké sčítanie, a 1 bod za konštatovanie, že násobením a najmenšími spoločnými násobkami nezískame nové prvočíslo.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.