2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 27. – 30. 3. 2011.*)

1. Určte veľkosti vnútorných uhlov všetkých trojuholníkov ABC s vlastnosťou: Vnútri strán AB, AC existujú postupne body K, M, ktoré s priesečníkom L priamok MB a KC tvoria tetivové štvoruholníky $AKLM$ a $KBCM$ so zhodnými opísanými kružnicami. (*Jaroslav Švrček*)

2. Určte všetky trojice prvočísel (p, q, r), pre ktoré platí

$$(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr.$$

(*Jaromír Šimša*)

3. Predpokladajme, že reálne čísla x, y, z vyhovujú sústave rovníc

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokážte, že potom platí nasledujúce tvrdenie:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je aspoň 9, avšak nanajvýš 25.
b) Niektoré z čísel x, y, z je nanajvýš 3 a iné z nich je aspoň 5. (*Jaromír Šimša*)

4. Uvažujme kvadratický trojčlen ax^2+bx+c s reálnymi koeficientmi $a \geqq 2$, $b \geqq 2$, $c \geqq 2$. Adam a Boris hrajú nasledujúcu hru: Ak je na ťahu Adam, vyberie jeden z koeficientov trojčlena a nahradí ho *súčtom* zvyšných dvoch. Ak je na ťahu Boris, vyberie jeden z koeficientov a nahradí ho *súčinom* zvyšných dvoch. Adam začína a hráči sa pravidelne striedajú. Hru vyhráva ten, po ktorého ťahu má vzniknutý trojčlen dva rôzne reálne korene. V závislosti od koeficientov a, b, c počiatočného trojčlena určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu. (*Michal Rolínek*)

5. V ostrouhlom trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný, označme P pätu výšky z vrcholu C na stranu AB, V priesečník výšok, O stred kružnice opísanej, D priesečník polpriamky CO so stranou AB a E stred úsečky CD. Dokážte, že priamka EP prechádza stredom úsečky OV. (*Karel Horák*)

6. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ také, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f\bigl(x \cdot f(y)\bigr) + \frac{1}{xy}.$$

(*Pavel Calábek*)