2019/2020
69. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 25. – 28. 8. 2020.*)

1. Daný je rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode P. Označme M stred strany AB. Nech Q je taký bod, že priamka QA je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku MAD a QB je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku MBC. Dokážte, že body Q, M, P ležia na jednej priamke. (*Patrik Bak, Slovensko*)

2. Pre dané kladné celé číslo n hovoríme, že reálne číslo x je n-dobré, ak existuje n kladných celých čísel $a_1, \ldots, a_n$ takých, že

$$x = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Nájdite všetky kladné celé čísla k, pre ktoré je pravdivé nasledovné tvrdenie: *Ak a, b sú reálne čísla také, že uzavretý interval $\langle a, b\rangle$ obsahuje nekonečne veľa 2020-dobrých čísel, tak interval $\langle a, b\rangle$ obsahuje aspoň jedno k-dobré číslo.* (*Josef Tkadlec, Česká rep.*)

3. Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 2020$. Venuša and Serena hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Venuša spojí úsečkou dve rôzne čísla také, že jedno z nich delí druhé. Potom Serena spojí úsečkou dve rôzne čísla také, ktoré ešte nie sú spojené a jedno z nich delí druhé. Potom rovnako pokračuje Venuša a následne sa striedajú až do momentu, keď vznikne trojuholník s vrcholom v čísle 2020, t. j. 2020 je spojené s dvoma číslami, ktoré sú spojené navzájom. Hráčka, ktorá nakreslí poslednú úsečku (dokončí trojuholník), vyhráva. Ktorá z nich má vyhrávajúcu stratégiu? (*Tomáš Bárta, Česká rep.*)

4. Dané je reálne číslo α. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$(x+y)(f(x) - f(y)) = \alpha(x-y)f(x+y)$$

pre všetky x, $y \in \mathbb{R}$. (*Walther Janous, Rakúsko*)

5. Nech n je kladné celé číslo a nech $d(n)$ označuje počet usporiadaných dvojíc kladných celých čísel (x, y) takých, že

$$(x+1)^2 - xy(2x - xy + 2y) + (y+1)^2 = n.$$

Nájdite najmenšie kladné celé číslo n spĺňajúce $d(n) = 61$. (*Patrik Bak, Slovensko*)

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech P je taký bod, že priamky PB a PC sú dotyčnicami kružnice opísanej trojuholníku ABC. Nech X a Y sú zvolené postupne na priamkach AB a AC tak, že $|\measuredangle XPY| = 2|\measuredangle BAC|$ a P leží vnútri trojuholníka AXY. Označme Z obraz bodu A v osovej súmernosti podľa osi XY. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku XYZ prechádza pevným bodom nezávislým od polohy bodov X a Y. (*Dominik Burek, Poľsko*)