2018/2019
68. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 7. – 13. 5. 2019.*)

1. [A0] Sú dané reálne čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 také, že každé dve sa líšia nanajvýš o 1. Nech s je súčet týchto čísel. Predpokladajme, že súčet druhých mocnín týchto čísel je rovný $2s^2$. Dokážte, že $s^2 \geqq \frac{25}{3}$.

2. [C0] Budova má 7 výťahov a každý z nich zastavuje na nejakých 6 poschodiach. Pre každé dve poschodia existuje výťah, ktorý ich priamo spája. Koľko najviac poschodí môže mať táto budova?

3. [G0] V trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC|$. Kružnica Γ leží zvonku trojuholníka ABC a dotýka sa priamky AC v bode C. Bod D leží na Γ tak, že kružnice ABD a Γ majú vnútorný dotyk. Úsečka AD pretína Γ v bode $E \neq D$. Dokážte, že priamka BE sa dotýka Γ.

4. [N0] Nájdite všetky dvojice (p, q) prvočísel, pre ktoré je číslo $p^{q-1} + q^{p-1}$ druhá mocnina celého čísla.

5. [N1] Nájdite všetky dvojice (n, k) kladných celých čísel, pre ktoré existuje kladné celé číslo s také, že čísla sn a sk majú rovnaký počet deliteľov.

6. [A2] Dokážte, že ľubovoľný polynóm stupňa n s vedúcim koeficientom 1 s reálnymi koeficientami sa dá napísať ako aritmetický priemer dvoch polynómov stupňa n s vedúcim koeficientom 1 takých, že každý z nich má n reálnych koreňov.

7. [C3] Nech a, b sú rôzne kladné celé čísla. Na spočiatku prázdnej tabuli prebieha nasledovný nekonečný proces.

(i) Ak je na tabuli aspoň jedna dvojica rovnakých čísel, tak si zvolíme nejakú takú dvojicu a zvýšime jeden z jej prvkov o a a druhý o b.
(ii) Ak taká dvojica neexistuje, napíšeme na tabuľu dve nuly.

Dokážte, že bez ohľadu na to, ako robíme ťahy (i), operácia (ii) bude vykonaná iba konečne veľa krát.

8. [A1] Nech $\mathbb{Q}^+$ označuje množinu kladných racionálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ spĺňajúce

$$f\left(x^2 f^2(y)\right) = f^2(x) f(y)$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

9. [C2] Je dané kladné celé číslo n a tabuľka $n \times n$. Každé políčko tabuľky je buď prázdne, alebo sa na ňom nachádza celé číslo. Platí, že v každom riadku a v každom stĺpci sú navzájom rôzne čísla. Dokážte, že políčka s číslami vieme ofarbiť namodro tak, že:

(1) V každom riadku a v každom stĺpci sa nachádza nanajvýš jedno modré políčko.
(2) Pre každé nezafarbené políčko s číslom existuje modré políčko v rovnakom riadku s väčším číslom alebo modré políčko v rovnakom stĺpci s menším číslom.

10. [G3] Je daný trojuholník ABC a nejaký jeho vnútorný bod T. Nech A_1, B_1, C_1 sú obrazy bodu T v osových súmernostiach postupne podľa priamok BC, CA, AB. Priamky A_1T, B_1T, C_1T pretínajú kružnicu Γ opísanú trojuholníku $A_1B_1C_1$ postupne v bodoch A_2, B_2, C_2. Dokážte, že priamky AA_2, BB_2, CC_2 sa pretínajú na Γ.

11. [G1] V trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC|$. Označme M stred BC. Nech P je taký bod, že $|PB| < |PC|$ a $PA \parallel BC$. Body X, Y ležia postupne na priamkach PB a PC tak, že B leží na úsečke PX, C leží na úsečke PY, a $|\measuredangle PXM| = |\measuredangle PYM|$. Dokážte, že štvoruholník $APXY$ je tetivový.

12. [N2] Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 2$ také, že pre všetky dvojice (i, j) celých čísel spĺňajúcich $0 \leqq i, j \leqq n$ platí, že číslo $i + j$ má rovnakú paritu ako

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{j}.$$

13. [A3] Nech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je postupnosť reálnych čísel takých, že $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a pre každé $n \geqq 2$ existuje $1 \leqq k \leqq n$ spĺňajúce

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

Určte najväčšiu možnú hodnotu rozdielu $a_{2018} - a_{2017}$.

14. [C1] Je dané prirodzené číslo $n \geqq 3$. Dokážte, že existuje $2n$-prvková množina S kladných celých čísel s nasledovnou vlastnosťou: Pre každé $m \in \{2, 3, \ldots, n\}$ sa množina S dá rozdeliť na dve podmnožiny s rovnakým súčtom prvkov, pričom počet prvkov jednej z nich je rovný m.

15. [G2] Je daný rovnobežník $ABCD$ taký, že $|\measuredangle DAB| > 90°$. Nech H je bod priamky AD taký, že $BH \perp AD$. Označme M stred AB. Ďalej nech $K \neq D$ je priesečník priamky DM s kružnicou ADB. Dokážte, že štvoruholník $HKCD$ je tetivový.

16. [N3] Nech $f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{2, 3, \ldots\}$ je funkcia taká, že $f(m + n) \mid f(m) + f(n)$ pre všetky dvojice (m, n) kladných celých čísel. Dokážte, že existuje kladné celé číslo $c > 1$, ktoré delí všetky hodnoty f.