2020/2021
70. ročník MO — *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 17. – 20. 6. 2021.*)

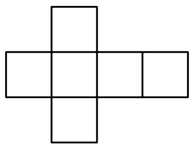
Súťaž jednotlivcov:

I-1. Uvažujme tabuľku 2×2. V každom jej políčku je napísané kladné celé číslo. Ak sčítame súčin čísel v prvom stĺpci, súčin čísel v druhom stĺpci, súčin čísel v prvom riadku a súčin čísel v druhom riadku, tak dostaneme 2021.
a) Určte všetky možné hodnoty súčtu všetkých štyroch čísel v tabuľke.
b) Nájdite počet tabuliek spĺňajúcich zadanie, ktoré obsahujú štyri navzájom rôzne čísla.

(*Tomáš Jurík, Patrik Bak, Slovensko*)

I-2. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Nech D a E sú päty kolmíc postupne z bodov B a C na os vonkajšieho uhla BAC. Označme F priesečník úsečiek BE a CD. Dokážte, že priamka AF je kolmá na priamku DE. (*Patrik Bak, Slovensko*)

I-3. *Krížom* nazveme útvar pozostávajúci zo šiestich jednotkových štvorčekov zobrazených na obr. 1 (a každý iný útvar, ktorý možno dostať jeho otočením). Nájdite najväčší



Obr. 1

možný počet krížov, ktoré môžu byť vystrihnuté z papiera rozmerov 6×11 rozdeleného na jednotkové štvorčeky (každý kríž musí pozostávať z práve šiestich z nich).

(*Tomasz Cieśla, Poľsko*)

I-4. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu, ktorú môže nadobúdať výraz

$$x^4 + y^4 - x^2y - xy^2,$$

v ktorom x a y sú kladné reálne čísla spĺňajúce $x + y \leqq 1$.

(*Mária Dományová, Slovensko*)

I-5. Nech $ABCDEFG$ je pravidelný 7-uholník. Priamky AB a CE sa pretínajú v bode P. Určte $|\measuredangle PDG|$. (*Łukasz Bożyk, Tomasz Przybyłowski, Poľsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Mějme lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, splňujícími $|AB| > |CD|$. Označme M střed úsečky AB. Nechť bod P leží uvnitř $ABCD$ a platí $|AD| = |PC|$ a $|BC| = |PD|$. Dokaž, že pokud $|\measuredangle CMD| = 90°$, pak čtyřúhelníky $AMPD$ a $BMPC$ mají stejný obsah. (*Łukasz Bożyk, Poľsko*)

T-2. Mějme dána čísla $x_i \in \{-1, 1\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, splňující

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

Dokaž, že n je dělitelné 4. (*Jaroslav Švrček, Česká rep.*)

T-3. Wyznacz liczbę par (a, b) dodatnich liczb całkowitych o tej własności, że największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50,$$

a najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a i b jest równa

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 50^2.$$

(*Martin Melicher, Slovensko*)

T-4. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n o tej własności, że w zbiorze

$$\{70, 71, 72, \ldots, 70 + n\}$$

można wskazać dwie różne liczby, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej. (*Jaromír Šimša, Česká rep.*)

T-5. Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z) spĺňajúce sústavu rovníc

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 4.$$

(*Jaroslav Švrček, Česká rep.*)

T-6. Nech $s(n)$ označuje ciferný súčet kladného celého čísla n. Použitím šiestich rôznych cifier sme vytvorili tri dvojciferné čísla p, q, r také, že

$$p \cdot q \cdot s(r) = p \cdot s(q) \cdot r = s(p) \cdot q \cdot r.$$

Nájdite všetky takéto čísla p, q, r. (*Pavel Šalom, Česká rep.*)