**64. ročník Matematickej olympiády**
**2014/2015** *Riešenia úloh IMO*

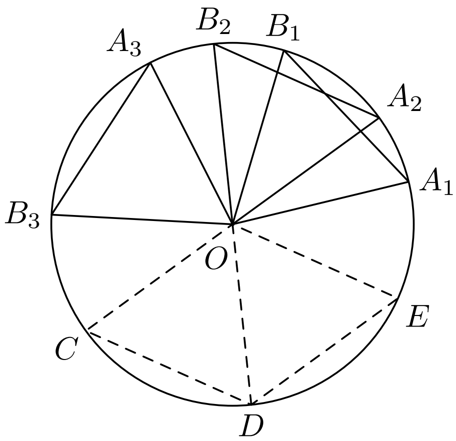
**1.** *Konečnú množinu $S$ pozostávajúcu z bodov roviny nazývame vyvážená, ak pre ľubovoľné dva rôzne body $A$, $B$ z množiny $S$ existuje v $S$ taký bod $C$, že $|AC| = |BC|$. Množinu $S$ nazývame bezstredová, ak pre žiadne tri rôzne body $A$, $B$, $C$ z množiny $S$ neexistuje v $S$ taký bod $P$, že $|PA| = |PB| = |PC|$.*

*a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$ existuje vyvážená množina obsahujúca práve $n$ bodov.*

*b) Určte všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$, pre ktoré existuje vyvážená bezstredová množina obsahujúca práve $n$ bodov.*

(*Holandsko*)

**Riešenie.** a) Najprv popíšeme konštrukciu vyváženej množiny, ktorá pozostáva z párneho počtu bodov. Nech $O$ je stred kružnice, na ktorej ležia navzájom rôzne body $C$, $D$, $E$, $A_1$, $A_2$, …, $A_k$ a $B_1$, $B_2$, …, $B_k$, pričom body $O$, $A_i$, $B_i$ sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka pre každé $i = 1, 2, \ldots, k$ a rovnako aj body $O$, $C$, $D$ a $O$, $D$, $E$ sú vrcholmi dvoch rôznych rovnostranných trojuholníkov (obr. 1). Overme, že




Obr. 1

množina $S = \{O, C, D, E, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k\}$ s $2k + 4$ bodmi je vyhovujúca vyvážená množina pre ľubovoľné celé číslo $k \geqq 0$; t. j. že pre ľubovoľné dva rôzne body z množiny $S$ existuje iný bod z množiny $S$, ktorý je od oboch bodov rovnako vzdialený. Ak sú tie dva body rôzne od $O$, tak zrejme pre ne vyhovuje bod $O$, pretože všetky ostatné body ležia na kružnici so stredom v bode $O$. V prípade, že jeden z vybraných bodov je bod $O$ a druhý je $X$, hľadaným bodom $Y \in S$ je ten bod, ktorý spolu s bodmi $O$ a $X$ tvorí vrcholy rovnostranného trojuholníka. Takýto bod v množine $S$ existuje a až na prípad $X = D$ je jednoznačne určený (ak $X = D$, tak vyhovuje $Y = C$ aj $Y = E$).

Ak v tejto konštrukcii vynecháme bod $E$, dostaneme vyváženú množinu s nepárnym počtom vrcholov. Iným príkladom vyváženej množiny pozostávajúcej z nepárneho počtu vrcholov sú vrcholy pravidelného $n$-uholníka pre $n = 2k + 1$, $k \geqq 1$. Označme túto množinu $S = \{A_1, A_2, \ldots A_{2k+1}\}$. Pre jej ľubovoľné dva rôzne body $A_i$ a $A_j$ je jediným bodom $C \in S$, ktorý spĺňa $|CA_i| = |CA_j|$, bod $C = A_k$, kde $k$ je riešením rovnice $2k \equiv \equiv i + j \pmod{n}$. Tento bod leží na priesečníku osi strany $A_iA_j$, ktorá je súčasne aj osou symetrie uvažovaného $n$-uholníka. Všimnime si tiež, že táto množina $S$ je aj bezstredová; jediný potenciálny bod $P$, ktorý by mal rovnakú vzdialenosť od troch rôznych bodov z množiny $S$, je stred pravidelného $n$-uholníka, ktorý ale neleží v množine $S$.

b) Vďaka konštrukcii bezstredovej množiny s nepárnym počtom bodov v časti a) nám ostáva ukázať, že bezstredová vyvážená množina s párnym počtom bodov $n$ neexistuje. Tvrdenie dokážeme sporom, predpokladajme, že taká bezstredová vyvážená množina $S$ existuje. Pre každú dvojicu bodov $A, B \in S$ nazveme bod $C \in S$, pre ktorý platí $|AC| = |BC|$, bod *asociovaný* s bodmi $A$ a $B$. Dokopy môžeme vybrať $\frac{1}{2}n(n-1)$ dvojíc bodov, preto existuje taký bod $P$, ktorý je asociovaný s aspoň

$$\left\lceil \frac{n(n-1)}{2} / n \right\rceil = \frac{n}{2}$$

pármi bodov. Samozrejme, medzi bodmi týchto párov nemôže byť bod $P$ a teda páry obsahujú iba $n-1$ bodov množiny $S$. Na druhej strane, $n/2$ párov zahŕňa $n$ bodov, preto existujú dva páry, ktoré sa prekrývajú v jednom bode. Označme ich $\{A, B\}$ a $\{A, C\}$, potom ale $|AP| = |BP| = |CP|$, čo je spor s bezstredovosťou množiny $S$.

---

**2.** *Určte všetky trojice $(a, b, c)$ kladných celých čísel, pre ktoré je každé z čísel*

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

*mocninou čísla* 2. (*Srbsko*)

**Riešenie.** (Podľa *Bui Truc Lama.*) Najprv rozoberieme prípad, ak by boli dve z čísel $a$, $b$, $c$ rovnaké, vďaka symetrii stačí uvažovať iba prípad $a = b$. Potom číslo $ac - b = a(c-1)$ je mocninou dvojky a teda $a = 2^k$ a $c = 2^l + 1$ pre nejaké nezáporné celé čísla $k$ a $l$. Číslo $ab - c = a^2 - c$ má byť tiež mocninou dvojky, t. j. pre nejaké nezáporné celé číslo $x$ platí rovnosť

$$2^{2k} - 2^l - 1 = 2^x. \tag{1}$$

Uvažujeme najprv $k > 0$ aj $l > 0$; potom je ľavá strana (1) nepárna a jediná nepárna mocnina dvojky je $2^0 = 1$. Z rovnosti

$$\begin{aligned} 2^{2k} - 2^l - 1 &= 1, \\ 2^{2k} &= 2^l + 2 \end{aligned} \tag{2}$$

dostaneme pre $l > 1$ spor (pravá strana je deliteľná dvoma a nie štyrmi, ľavá strana je deliteľná štyrmi pre $k > 0$). Ostáva $l = 1$, čo vedie na $k = 1$ a spätne na $a = b = 2$, $c = 3$. Vráťme sa spať k rovnosti (1). Ak je $k = 0$, tak ľavý strana je záporné číslo, spor. Ak $l = 0$, tak dostaneme rovnicu (2), t. j. $2^{2k} = 2^x + 2$, ktorej riešenie je iba $k = 1$ (pre $k \geqq 2$ je aj $x \geqq 2$ a dostaneme spor modulo 4), čo spolu s $x = 0$ vedie na riešenie $a = b = c = 2$. V tejto vetve sme našli dve riešenia $(a, b, c) \in \{(2, 2, 3), (2, 2, 2)\}$, spolu s permutáciami sú to štyri rôzne riešenia.

Ďalej môžeme predpokladať, že všetky čísla $a$, $b$, $c$ sú navzájom rôzne. Výrazy v zadaní sú symetrické, preto stačí vyriešiť prípad $a > b > c$. Ak $c = 1$, tak čísla $ac - b = a - b$ aj $bc - a = b - a$ sú navzájom opačné a teda nemôžu byť obe mocninami dvojky. Ostáva teda prípad

$$a > b > c > 1, \quad \text{a teda} \quad c \geqq 2,\ b \geqq 3,\ a \geqq 4. \tag{3}$$

Jednotlivé mocniny dvojky zapíšme ako

$$ab - c = 2^x, \qquad bc - a = 2^y, \qquad ac - b = 2^z$$

pre nejaké nezáporné celé čísla $x$, $y$, $z$. Tieto mocniny vieme vďaka usporiadaniu $a > b > c$ zoradiť podľa veľkosti, pretože

$$\left.\begin{aligned} 2^x - 2^z &= (ab-c)-(ac-b) = (a+1)(b-c) > 0 \\ 2^z - 2^y &= (ac-b)-(bc-a) = (c+1)(a-b) > 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x > z > y. \tag{4}$$

Zamerajme teraz svoju pozornosť na výrazy $2^x - 2^z = (a+1)(b-c)$ a $2^x + 2^z = (a-1)(b+c)$. Oba výrazy sú (vďaka $x > z$) deliteľné číslom $2^z$, pričom obe čísla $a-1$ a $a+1$ nemôžu byť deliteľné štyrmi. Rozoberme 2 prípady:

Ak $4 \nmid a-1$, tak $2^{z-1} \mid b+c$ a preto $2^{z-1} \leqq b+c$, z čoho

$$\begin{aligned} 2^z = ca - b &\leqq 2b + 2c, \\ c(a-2) &\leqq 3b, \\ c &\leqq \frac{3b}{a-2}. \end{aligned}$$

Ak $4 \nmid a+1$, potom $2^{z-1} \mid b-c$ (z usporiadania vieme, že $b > c$) a podobne ako v predošlom prípade využitím $2^z \leqq 2(b-c)$ dostaneme horný odhad pre hodnotu $c$

$$\begin{aligned} 2^z = ca - b &\leqq 2b - 2c \\ c &\leqq \frac{3b}{a+2} \leqq \frac{3b}{a-2}, \end{aligned}$$

a preto musí v každom prípade platiť slabší z uvedených dvoch odhadov, t. j.

$$c \leqq \frac{3b}{a-2}. \tag{5}$$

Vďaka usporiadaniu (3) a odhadu (5) obmedzíme možné hodnoty $c$. Ak $a = 4$, tak z usporiadania (3) máme iba možnosť $b = 3$ a $c = 2$. Ak $a = 5$, tak $b \in \{3, 4\}$ a teda $c \leqq 3b/(a-2) \leqq 12/3 = 4$. Napokon, $a \geqq 6$ je ekvivalentné s nerovnosťou $1/(a-2) \leqq 3/(2a)$ a následne $c \leqq 3b/(a-2) \leqq 9b/2a < 9/2 < 5$. Nutne teda $c \in \{2, 3, 4\}$. Tieto tri prípady rozoberieme.

- ▷ Nech $c = 2$. Ak je $a$ nepárne, tak $2^y = bc - a = 2b - a = 1$, pretože $2b - a$ je nepárne číslo. Potom $a = 2b - 1$ a teda $2^z = 2a - b = 3b - 2$, z čoho $b = (2^z + 2)/3$ a spätne $a = (2^{z+1} + 1)/3$ a napokon

$$2^x = ab - 2 = \left(\frac{2^z + 2}{3}\right)\left(\frac{2^{z+1} + 1}{3}\right) - 2 = \frac{2^{2z+1} + 2^{z+2} + 2^z - 16}{9}. \tag{6}$$

  Pre $z > 4$ máme $16 < 2^z < 2^{z+2} < 2^{2z+1}$, takže maximálna mocnina dvojky, ktorá delí zlomok (6), je 16. Hodnota výrazu v čitateli rastie a preto môže byť číslo (6) mocninou dvojky iba ak $z = 0, 1, 2, 3, 4$. Vypíšeme tieto možnosti:

| $z$ | $2^z$ | $2^{z+2}$ | $2^{2z+1}$ | $2^z + 2^{z+2} + 2^{2z+1} - 16$ | $ab - 2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 | 2 | $-9$ | $-1$ |
| 1 | 2 | 8 | 8 | 2 | 2/9 |
| 2 | 4 | 16 | 32 | 36 | 4 |
| 3 | 8 | 32 | 128 | 152 | 152/9 |
| 4 | 16 | 64 | 512 | 576 | 64 |

Hodnota $ab - 2$ je mocninou dvojky iba pre $z = 2$, vtedy dostávame už známe riešenie $(a, b, c) = (3, 2, 2)$, ale pre $z = 4$ máme nové riešenie $(a, b, c) = (11, 6, 2)$. Analogicky môžeme postupovať, ak by bolo číslo $b$ nepárne – v tomto prípade ale riešenie spĺňajúce (3) nedostaneme. Ak by boli obe čísla $a$ aj $b$ párne, tak $2^z = ab - 2$ bude deliteľné dvoma, ale nie štyrmi, preto $ab - 2 = 2$, čo je v spore s (3).

▷ Nech $c = 3$. Ak dosadíme $a = bc - 2^y$ do $2^z = ca - b$, dostaneme $2^z = c^2b - 2^y c - b$ a z (4) vieme, že $2^y < 2^z$ a tak môžeme písať $2^y(c + 2^{z-y}) = c^2b - b = b(c^2 - 1) = 8b \equiv 0 \pmod{2^y}$. Podobne z rovnice $b = ca - 2^z$ dosadením do $2^y = bc - a = c^2a - 2^z a - a$ a využitím (4) dostaneme $c^2a - a = a(c^2 - 1) = 8a \equiv 0 \pmod{2^y}$. Ak by teda bolo $2^y \geqq 16$, museli by byť obe čísla $a$ aj $b$ párne, potom ale $2^x = ab - 3 = 1$, čo je spor s $2^x > 2^y \geqq 16$. Ostávajú možnosti $y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Z nerovnosti (5) pre $c = 3$ je $a - 2 \leqq b$, čo spolu s (3) dáva iba možnosti $a = b + 1$ a $a = b + 2$. Dosadíme to do rovnice $3b - a = 2^y$ a v prvom prípade dostaneme $2b - 1 = 2^y = 1$ (lebo je to nepárne číslo), z čoho $b = 1$, spor s (3). V druhom prípade je $2^y = 2b - 2$ a ak uvážime, že z (3) je $b > c = 3$, tak stačí preskúmať $y = 3$, pre ktoré vychádza riešenie $(a, b, c) = (7, 5, 3)$.

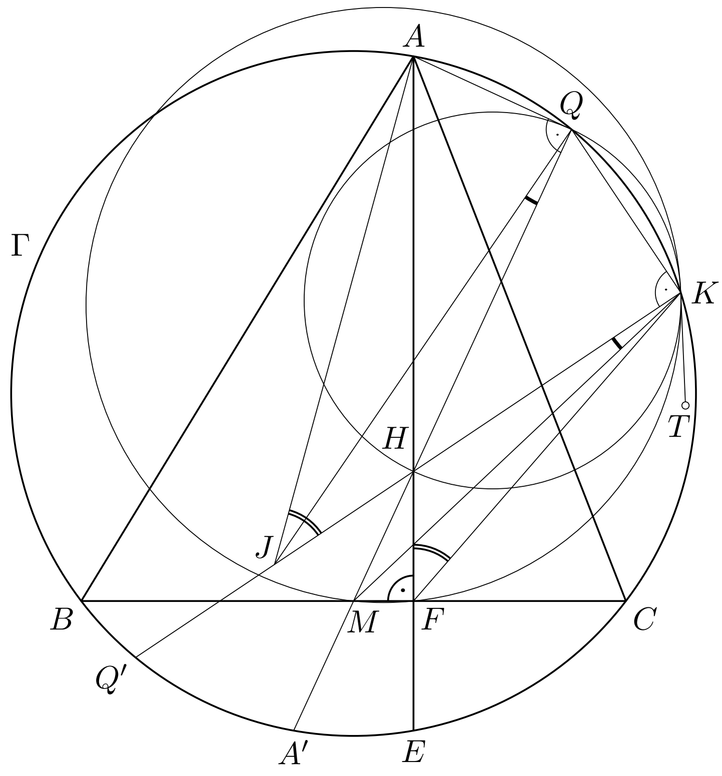
▷ Nech $c = 4$. Opäť z nerovnosti (5) pre $c = 4$ je $4(a - 2) \leqq 3b$, čo spolu s $b \leqq a - 1$ dáva $a \leqq 5$. To je ale spor s (3) pre $c = 4$ (lebo potom $a \geqq 6$).

Riešeniami sú trojice $(a, b, c) \in \{(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 6, 11), (3, 5, 7)\}$ a ich permutácie.

---

**3.** *Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$, pričom $|AB| > |AC|$. Označme $\Gamma$ jeho opísanú kružnicu, $H$ priesečník výšok a $F$ pätu výšky z vrcholu $A$. Stred strany $BC$ označme $M$. Nech $Q$ je taký bod kružnice $\Gamma$, že $|\angle HQA| = 90°$. Ďalej nech $K$ je taký bod kružnice $\Gamma$, že $|\angle HKQ| = 90°$. Predpokladajme, že body $A$, $B$, $C$, $K$ a $Q$ sú všetky rôzne a ležia na kružnici $\Gamma$ v tomto poradí. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom $KQH$ a $FKM$ sa navzájom dotýkajú.* (Ukrajina)

**Riešenie.** Zostrojme najprv dva pomocné body, obrazy bodov $A$ a $Q$ podľa stredu kružnice $\Gamma$; označme ich postupne $A'$ a $Q'$. Z vlastnosti ich konštrukcie sú uhly $AQA'$ a $QKQ'$ pravé a teda body $Q$, $H$, $A'$ ležia na priamke (zo zadania je $|\angle AQH| = 90°$) a podobne aj body $K$, $H$ a $Q'$ ležia na priamke (zo zadania je $|\angle QKH| = 90°$). Ak označíme $E$ priesečník polpriamky $AH$ s kružnicou $\Gamma$, tak je známe, že $F$ je stredom úsečky $HE$. Podobne je známe, že $M$ je stredom úsečky $HA'$ ($MF$ je stredná priečka v trojuholníku $HA'E$).




Obr. 2

Uvažujme ľubovoľný bod $T$ taký, že priamka $TK$ je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku $KQH$ v bode $K$, pričom body $Q$ a $T$ ležia na opačných stranách priamky $KH$ (obr. 2). Potom $|\angle HKT| = |\angle HQK|$ a ostáva ukázať zhodnosť úsekových uhlov $|\angle MKT| = |\angle CFK|$ $(= 180° - |\angle MFK|)$. S využitím $|\angle MKT| = |\angle HKT| - |\angle HKM|$ potrebujeme ukázať

$$|\angle HQK| = |\angle CFK| + |\angle HKM|.$$

Dosadením rovností $|\angle HQK| = 90° - |\angle Q'HA'|$ a $|\angle CFK| = 90° - |\angle KFA|$ to môžeme prepísať na

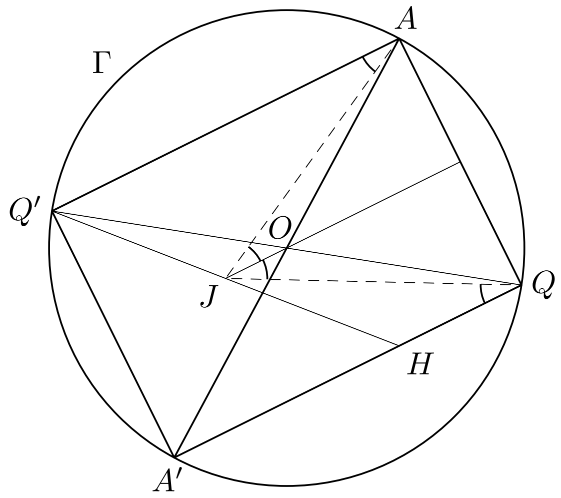
$$|\angle Q'HA'| = |\angle KFA| - |\angle HKM|. \tag{1}$$

Trojuholníky $KHE$ a $AHQ'$ sú podobné. Označme $J$ stred úsečky $HQ'$; potom z tejto podobnosti je $|\angle KFA| = |\angle HJA|$ a analogicky z podobnosti trojuholníkov $KHA'$ a $QHQ'$ dostávame $|\angle HKM| = |\angle JQH|$. Dosadením do (1) dostávame

$$|\angle Q'HA'| = |\angle HJA| - |\angle JQH|. \tag{2}$$

Z uhlov v trojuholníku $HJQ$ vyplýva rovnosť $|\angle Q'HA'| = |\angle JQH| + |\angle HJQ|$ a z uhlov pri vrchole $J$ rovnosť $|\angle HJA| = |\angle QJA| + |\angle HJQ|$. Po dosadení do (2) ostáva dokázať $2 \cdot |\angle JQH| = |\angle QJA|$.

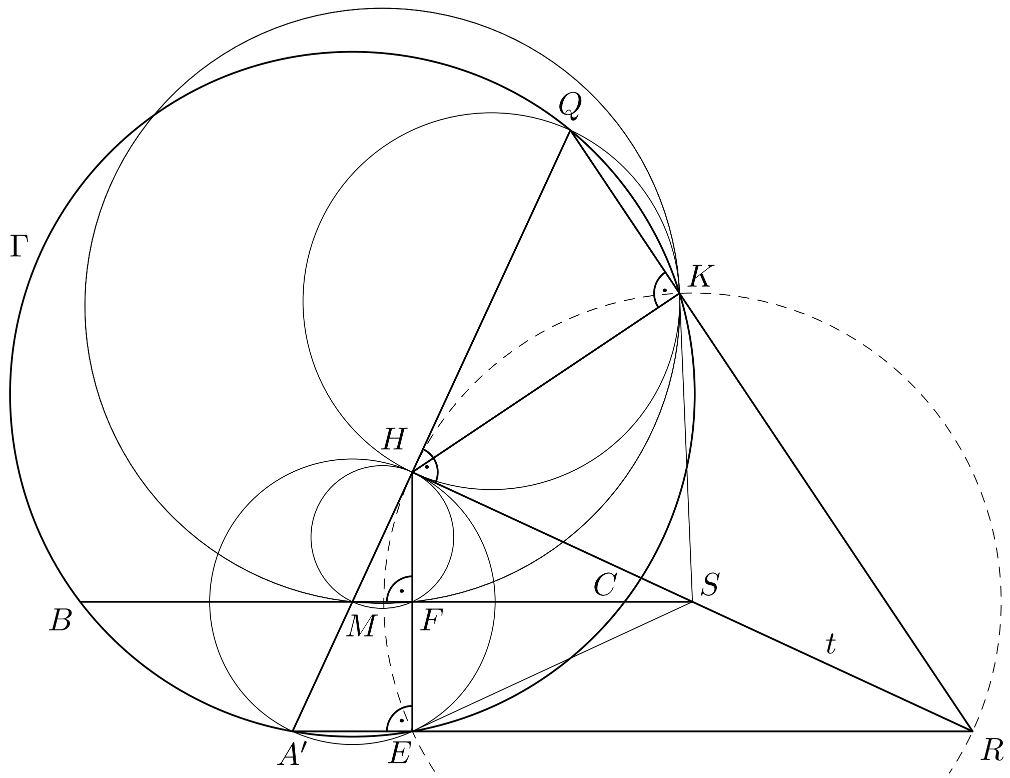
Posledná rovnosť vyplýva z toho, že $AQA'Q'$ je obdĺžnik (jeho uhlopriečky sú priemermi kružnice $\Gamma$, obr. 3). Bod $J$, ktorý je stredom úsečky $HQ'$, leží aj na osi




Obr. 3

úsečky $AQ$ (potom $|\measuredangle JQH| = |\measuredangle JAQ'|$ a $|\measuredangle QJA| = (90° - |\measuredangle QAJ|) + (90° - |\measuredangle AQJ|) = |\measuredangle JQH| + |\measuredangle JAQ'|$).

**Iné riešenie.** Definujme body $A'$ a $E$ a súčasne využijeme aj pozorovanie, že priamka $MH$ prechádza bodom $Q$ ako v predošlom riešení. Všimnime si, že bod $A'$ je druhým priesečníkom priamky $MH$ a kružnice $\Gamma$ a bod $E$ spĺňa $|\measuredangle HEA'| = 90°$ (obr. 4). V kružniciach opísaných trojuholníkom $KHQ$ a $EA'H$ sú úsečky $HQ$ a $HA'$ postupne




Obr. 4

priemermi, preto existuje ich spoločná tetiva $t$ v bode $H$ kolmá na úsečku $MH$. Nech $R$ je bod, ktorý má ku kružniciam opísaným trojuholníkom $ABC$, $KHQ$ a $EA'H$ rovnakú mocnosť; nájdeme ho ako priesečník chordál $QK$ a $AE'$. Nech $S$ je stred úsečky $HR$; z rovnosti $|\measuredangle QKH| = |\measuredangle HEA'| = 90^\circ$ vyplýva, že štvoruholník $HERK$ je tetivový so stredom opísanej kružnice v bode $S$. Čiže $|SK| = |SE| = |SH|$. Priamka $BC$, ktorá je osou úsečky $HE$, prechádza bodom $S$. Teraz už úlohu dokončíme pomocou mocnosti bodu $S$ ku kružniciam $HMF$, $KHQ$ a $KFM$. Priamka $SH$ je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku $HMF$ v bode $H$, preto

$$|SM| \cdot |SF| = |SH|^2 = |SK|^2.$$

Takže mocnosť bodu $S$ ku kružniciam opísaným trojuholníkom $KQH$ a $KFM$ je $|SK|^2$, preto je priamka $SK$ dotyčnicou oboch kružníc v bode $K$.

---

**4.** *Trojuholník $ABC$ má opísanú kružnicu $\Omega$, ktorej stred označme $O$. Nech kružnica $\Gamma$ so stredom $A$ pretína úsečku $BC$ v bodoch $D$ a $E$, pričom body $B$, $D$, $E$, $C$ sú všetky rôzne a ležia na priamke $BC$ v tomto poradí. Kružnice $\Gamma$ a $\Omega$ sa pretínajú v bodoch $F$ a $G$, pričom body $A$, $F$, $B$, $C$, $G$ ležia na kružnici $\Omega$ v tomto poradí. Označme $K$ ďalší priesečník kružnice opísanej trojuholníku $BDF$ s úsečkou $AB$. Podobne označme $L$ ďalší priesečník kružnice opísanej trojuholníku $CGE$ s úsečkou $CA$. Predpokladajme, že priamky $FK$ a $GL$ sú rôzne a pretínajú sa v bode $X$. Dokážte, že $X$ leží na priamke $AO$.*

(*Grécko*)

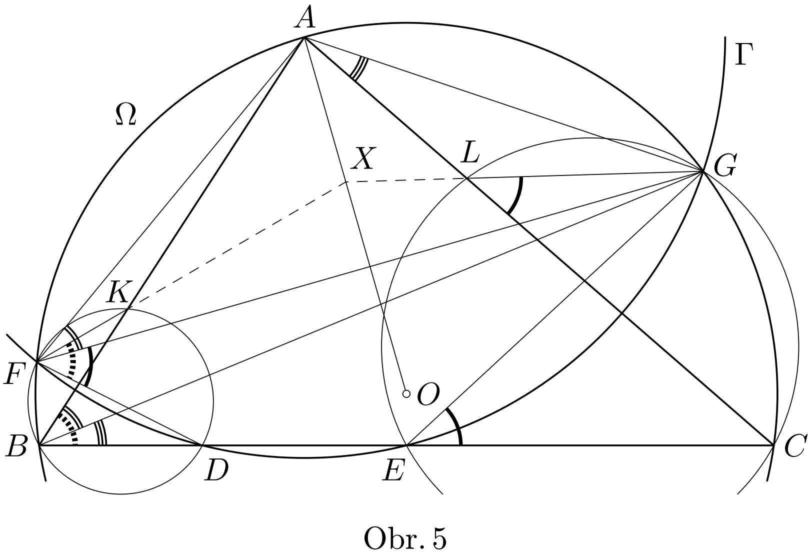
**Riešenie.** Stačí ukázať, že $FK$ a $GL$ sú symetrické vzhľadom na priamku $AO$. Tetivy $AF$ a $AG$ kružnice $\Omega$ majú zo zadania rovnakú dĺžku a sú preto symetrické vzhľadom na priemer $AO$. Potrebujeme ukázať rovnosť

$$|\measuredangle KFA| = |\measuredangle AGL|.$$

Dostaneme ju postupnou úpravou a využitím uhlov v tetivových štvoruholníkoch $FDEG$, $AFBG$, $BDKF$, $ECGL$ a $BCGA$ (obr. 5):

$$\begin{aligned} |\measuredangle KFA| &= |\measuredangle DFG| + |\measuredangle GFA| - |\measuredangle DFK| = |\measuredangle CEG| + |\measuredangle GBA| - |\measuredangle DBK| = \\ &= |\measuredangle CEG| - |\measuredangle CBG| = |\measuredangle CLG| - |\measuredangle CAG| = |\measuredangle AGL|. \end{aligned}$$

Tým je úloha vyriešená.




Obr. 5

**5.** *Označme $\mathbb{R}$ množinu všetkých reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť*

$$f\bigl(x + f(x+y)\bigr) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

*platí pre všetky reálne čísla $x$, $y$.* (*Albánsko*)

**Riešenie.** Dve vyhovujúce funkcie nájdeme medzi lineárnymi funkciami; ak skúšame hľadať funkcie v tvare $f(x) = ax + b$, priamym dosadením do zadania dostaneme

$$\begin{aligned} a(x + a(x+y) + b) + b + axy + b &= x + a(x+y) + b + y(ax+b),\\ a(a(x+y) + b) + b &= x + ay + yb,\\ x(a^2-1) + y(a^2 - a - b) + (ab + b) &= 0, \end{aligned}$$

z čoho porovnaním koeficientov pri $x$ dostaneme $a \in \{-1, +1\}$ a následne pre $a = -1$ z koeficientu pri $y$ dopočítame $b = 2$ a pre $a = +1$ z absolútneho člena dostaneme $b = 0$. Spätným dosadením overíme, že skutočne obe funkcie $f(x) = -x + 2$ aj $f(x) = x$ sú riešeniami.

Ďalej ukážeme, že iné riešenia úloha nemá. Najprv zistíme hodnotu $f(0)$. Dosadením $x = y = 0$ do zadanej rovnice dostaneme $f(f(0)) = 0$ a následne dosadením $x = 0$ a $y = f(0)$ získame

$$\begin{aligned} f(f(f(0))) + f(0) &= f(f(0)) + f(0)^2,\\ 2f(0) &= f(0)^2, \end{aligned}$$

z čoho $f(0) \in \{0, 2\}$.

Dosaďme $y = 1$ do pôvodnej rovnice. Dostaneme

$$f(x + f(x+1)) = x + f(x+1), \tag{1}$$

teda hodnota $x + f(x+1)$ je pevným bodom funkcie $f$ pre každé reálne číslo $x$.

Rozlíšime teraz dva prípady v závislosti od hodnoty $f(0)$.

*Prípad 1:* $f(0) = 2$. Dosadenie $x = 0$ do pôvodnej rovnice vedie na

$$\begin{aligned} f(f(y)) + f(0) &= f(y) + yf(0),\\ f(f(y)) - f(y) &= 2(y-1). \end{aligned} \tag{2}$$

Z ľavej strany rovnice (2) vidíme, že ak $f(y) = y$ pre nejaké $y$, tak $y = 1$. Spojením s rovnicou (1) vidíme, že $x + f(x+1) = 1$ pre všetky reálne čísla $x$, z čoho $f(x) = 2 - x$.

*Prípad 2:* $f(0) = 0$. Najprv zistíme hodnoty $f(1)$ a $f(-1)$. Hodnotu $f(-1)$ dopočítame z rovnosti (1) pre $y = -1$: $f(-1) = -1$. Zadaná rovnica pre $x = 1$ má tvar

$$f(1 + f(y+1)) + f(y) = 1 + f(y+1) + yf(1). \tag{3}$$

a vzápätí dosadením $y = -1$ dopočítame s využitím $f(-1) = -1$ a $f(0) = 0$ hodnotu $f(1) = 1$. Spätne dosadením $f(1) = 1$ do rovnice (3) dostaneme

$$f(1 + f(y+1)) + f(y) = 1 + f(y+1) + y. \tag{4}$$

Dosaďme teraz $y = 0$ a nahraďme $x$ hodnotou $x + 1$ v pôvodnej rovnici, dostaneme

$$f(x + f(x + 1) + 1) = x + f(x + 1) + 1$$

a porovnaním s rovnicou (1) vidíme, že ak $y_0$ je pevným bodom, tak aj $y_0 + 1$ je pevným bodom funkcie $f$ a opakovaním tejto úvahy je aj $y_0 + 2$ pevným bodom funkcie $f$, t. j. $f(x + f(x + 1) + 2) = x + f(x + 1) + 2$ a dosadením $x - 2$ za $x$ môžeme písať

$$f(x + f(x - 1)) = x + f(x - 1),$$

ale na druhej strane dosadenie $y = -1$ do pôvodnej rovnice dáva

$$f(x + f(x - 1)) = x + f(x - 1) - f(x) - f(-x),$$

a teda $f(-x) = -f(x)$.

V pôvodnej rovnici substituujeme $(x, y)$ za $(-1, -y)$ a využijeme $f(-1) = -1$ a nepárnosť funkcie $f$, aby sme dostali

$$\begin{aligned} f(-1 + f(-y - 1)) + f(y) &= -1 + f(-y - 1) + y, \\ -f(1 + f(y + 1)) + f(y) &= -1 - f(y + 1) + y. \end{aligned}$$

Nakoniec to už iba porovnáme s rovnicou (4) a vidíme, že musí platiť $f(y) = y$ pre všetky reálne čísla $y$.

---

**6.** *Postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ celých čísel spĺňa nasledujúce podmienky:*
*i)* $1 \leqq a_j \leqq 2015$ *pre všetky $j \geqq 1$;*
*ii)* $k + a_k \neq l + a_l$ *pre všetky $1 \leqq k < l$.*
*Dokážte, že existujú kladné celé čísla $b$ a $N$ také, že nerovnosť*

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqq 1007^2$$

*platí pre všetky celé čísla $m$, $n$ spĺňajúce $n > m \geqq N$.* (*Austrália*)

**Riešenie.** (Podľa *Bui Truc Lama.*) Odrátajme pre jednoduchosť od každého $a_i$ jednotku, teda $a_i \leftarrow a_i - 1$. Tým zabezpečíme, že podmienka i) zo zadania bude $0 \leqq a_j \leqq 2014$ pre všetky $j \geqq 1$. Podmienku ii) táto transformácia neovplyvní, v dokazovanej nerovnosti bude potrebné nami vypočítanú hodnotu $b$ zväčšiť o jednotku.

Zostrojme postupnosť $s_i = a_i + i$. Číslo $k$ budeme nazývať *dierou*, ak neexistuje $j$ také, že $s_j = k$. Číslo $k$ budeme nazývať *dierou do $i$*, ak neexistuje $j$ také, že $1 \leqq j \leqq i$ a $s_i = k$.

Pozrime sa na diery do $n$. Všimnime si, že všetky čísla $s_1, s_2, \ldots, s_n$ nadobúdajú hodnoty z intervalu $\langle 1, n + 2014 \rangle$ $(1 \leqq i + a_i \leqq n + 2014)$ a sú všetky rôzne (podmienka ii) v zadaní). Takže v intervale $\langle 1, n + 2014 \rangle$ je práve 2014 $(= (n + 2014) - n)$ dier do $n$. Zoberme nejakú dieru do $n$, napr. $l$, t. j. neexistuje $j \leqq n$ také, že $s_j = l$. Ak $l \leqq n$, tak $l$ bude aj dierou do $j$ pre všetky $j \geqq n$ (lebo to nemáme ako „zaplátať“, $s_i \geqq n + 1$ pre $i > n$). Takúto dieru nazveme *permanentnou* dierou od $n$.

Zrejme počet permanentných dier nemôže stále rásť – je zhora obmedzený počtom dier do $i$, a tých je najviac 2014. Takže pre nejaké $l$ platí, že pre $i \geqq l$ je počet permanentných dier od $n$ konštantný, označme ho $2014 - k$; pričom vieme, že $0 \leqq 2014 - k \leqq 2014$, t. j. $0 \leqq k \leqq 2014$. Zvoľme $N = l$, $b = 2014 - k$ a ukážme požadovanú nerovnosť.

Pre každé $i \geqq l$ označme $q_i$ súčet nepermanentných dier do $i$ (tých je presne $k$), zmenšený o $ki$ (teda o súčet vzdialeností dier od $i$). Označme

$$S_i = s_1 + s_2 + \ldots + s_i = (a_i + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_i + i).$$

Pozrime sa, ako vieme inak vyjadriť $S_i$ – je to súčet všetkých „ne-dier" v intervale $\langle 1, i + 2014\rangle$. Súčet všetkých dier neprevyšujúcich $N$ je konštantný, označme ho $Z$. Čísla v intervale $\langle N + 1, i\rangle$ nie sú dierami, pretože by to boli diery do $i$ neprevyšujúce $i$ a teda by to museli byť permanentné diery, ktoré sa už za hodnotou $N$ nevyskytujú. Zostávajúce (nepermanentné) diery sa teda nachádzajú v intervale $\langle i + 1, i + 2014\rangle$ a ich súčet je

$$(i + 1) + (i + 2) + \ldots + (i + 2014) - (q_i + ki).$$

Celkom teda

$$\begin{aligned} S_i &= Z + (N + 1) + (N + 2) + \ldots + i + \Big((i + 1) + \ldots + (i + 2014) - (q_i + ki)\Big) = \\ &= Z + (N + 1) + (N + 2) + \ldots + i + (2014 - k)i + \frac{2014 \cdot 2015}{2} - q_i. \end{aligned}$$

Upravujme rozdiel $S_i - S_j$ pre $i > j$:

$$\begin{aligned} S_i - S_j &= (a_{j+1} + \underline{j + 1}) + (a_{j+2} + \underline{j + 2}) + \ldots + (a_i + \underline{i}) = \\ &= \left(Z + (N + 1) + (N + 2) + \ldots + i + (2014 - k)i + \frac{2014 \cdot 2015}{2} - q_i\right) - \\ &\quad - \left(Z + (N + 1) + (N + 2) + \ldots + j + (2014 - k)j + \frac{2014 \cdot 2015}{2} - q_j\right) = \\ &= \underline{(j + 1) + (j + 2) + \ldots + i} + (2014 - k)(i - j) + q_j - q_i. \end{aligned}$$

Z prvej a poslednej rovnosti tak máme

$$\begin{aligned} a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_i &= (2014 - k)(i - j) + q_j - q_i \\ (a_{j+1} - (2014 - k)) + \ldots + (a_i - (2014 - k)) &= q_j - q_i \\ \sum_{r=j+1}^{i} a_r - b &= q_j - q_i, \quad \text{pričom } i > j \geqq N. \end{aligned}$$

Ostáva tak ukázať, že $|q_j - q_i| \leqq 1007^2$; na to stačí uvažovať rozpätie hodnôt $q_i$ – je to súčet vzdialeností $k$ čísel z intervalu $\langle i + 1, i + 2014\rangle$ od čísla $i$ (podobne pre $q_j$), t. j.

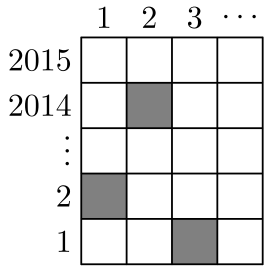
$$\frac{k(k - 1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + k \leqq q_i \leqq 2014 + 2013 + \ldots + (2015 - k) = \frac{k(4029 - k)}{2}$$

a následne

$$|q_j - q_i| \leqq \frac{k(4029-k)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = k(2014-k) \leqq \left(\frac{k+(2014-k)}{2}\right)^2 = 1007^2,$$

pričom v poslednom kroku sme využili $0 \leqq k \leqq 2014$ a AG-nerovnosť. Tým sme úlohu vyriešili.

**Iné riešenie.** (Podľa *Eduarda Batmendijna.*) Prvá podmienka v zadaní hovorí, že postupnosť $a_1, a_2, \dots$ môžeme znázorniť ako tabuľku s 2015 riadkami a nekonečne veľa stĺpcami, pričom jej políčko v $x$-tom stĺpci zľava a $y$-tom riadku zdola (ďalej len políčko $(x, y)$) je vyfarbené (sivou) práve vtedy, keď $a_x = y$. Napríklad pre $a_1 = 2$, $a_2 = 2014$ a $a_3 = 1$ bude tabuľka vyzerať ako na obr. 6.




Obr. 6

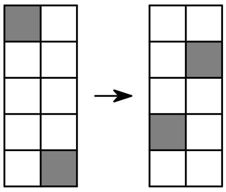
Druhá podmienka v zadaní hovorí, že na diagonále v smere „$\nwarrow\!\searrow$“ (ďalej už budeme hovoriť iba o diagonále) sa nenachádzajú dve vyfarbené políčka; totiž dve vyfarbené políčka $(k, l)$ a $(m, n)$ zodpovedajúce $a_k = l$ a $a_m = n$ na takejto diagonále spĺňajú $m - k = l - n$ a následne teda $a_k + k = l + k = n + m = a_m + m$, čo nie je dovolené.

Všimnime si, že $i$-ty stĺpec našej tabuľky obsahuje práve jedno vyfarbené políčko (určené hodnotou $a_i$) pre ľubovoľné $i$. Uvažujme prvých $X$ stĺpcov tabuľky; zasahuje do nich $X + 2014$ diagonál a je v nich práve $X$ vyfarbených políčok pre ľubovoľné $X$. Potom je v celej tabuľke najviac 2014 prázdnych diagonál (bez vyfarbeného políčka). Teda niekde je posledná prázdna diagonála. Zvoľme $N$ také, aby bolo za koncom poslednej prázdnej diagonály. Nech $P$ je počet prázdnych diagonál (t. j. $0 \leqq P \leqq 2014$), potom zvoľme $b = P + 1$ ($1 \leqq b \leqq 2015$). Teraz ukážeme, že pre každé $n > m \geqq N$ platí

$$-1007^2 \leqq \sum_{j=m+1}^{n} a_j - b \leqq 1007^2.$$

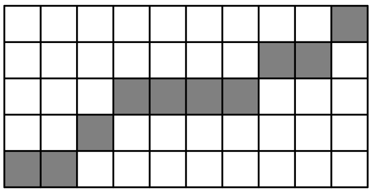
Pozrime sa na úsek stĺpcov od $m + 1$ do $n$ vrátane (ďalej len úsek $[m + 1, n]$). Do tohto úseku zasahuje $n - m + 2014$ diagonál a máme tam $n - m$ vyfarbených políčok a teda 2014 diagonál, v ktorých v tomto úseku nič nie je. Keďže v tejto časti tabuľky už nie sú prázdne diagonály, všetkých týchto 2014 prázdnych diagonál musí byť pri začiatku alebo konci tohto úseku.

Vyfarbené políčka v našom úseku teraz preusporiadame tak, aby sa s nimi lepšie pracovalo, ale tak, aby sa súčet $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$ v dokazovanej nerovnosti nezmenil. Ak nájdeme dvojicu $a_i > a_{i+1}$, tak prehodením vyfarbených políčok podľa obr. 7 sa súčet $a_i + a_{i+1}$ zachová, ale nerovnosť sa zmení na $a_i \leqq a_{i+1}$. Všimnime si aj to, že prehadzované vyfarbené políčka sa pohybujú po svojich diagonálach.



Obr. 7

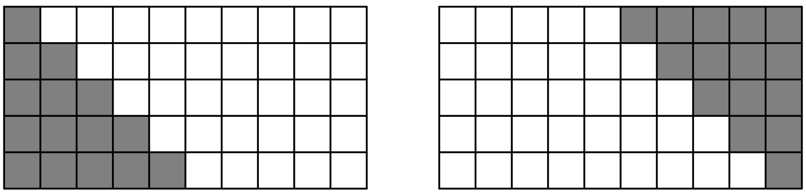
Týmto postupom zabezpečíme, že postupnosť vyfarbených políčok (a teda aj hodnôt) $a_j$ bude neklesajúca; napríklad ako na obr. 8.



Obr. 8

Navyše preusporiadanie do neklesajúcej postupnosti má ďalšiu užitočnú vlastnosť (V): ak pre nejaké $i$ je $a_{i+1} = a_i + d$ (pre neklesajúcu postupnosť je zrejme $d \geqq 0$), tak medzi políčkami $(i, a_i)$ a $(i+1, a_{i+1})$ je presne $d$ prázdnych diagonál. Inak povedané, ak medzi políčkami $(i, a_i)$ a $(i+1, a_{i+1})$ nie sú prázdne diagonály, tak $a_{i+1} = a_i$.

Označme teraz trojuholník (s odvesnami dlhými 2015 políčok) na začiatku úseku $[x+1, y]$, ktorý je tvorený neúplnými diagonálami (ich ľavé konce ležia pred naším úsekom) ako ľavý trojuholník $LT(x+1)$ a podobne ten na jeho konci ako pravý trojuholník $PT(y)$ (argument v zátvorke zodpovedá stĺpcu, v ktorom je vrchol pri pravom uhle trojuholníka), poz. obr. 9.



Obr. 9

Preusporiadajme úsek $[1, m]$ (prvých $m > N$ stĺpcov tabuľky) podobne ako sme to urobili s úsekom $[m+1, n]$. Do týchto $m$ stĺpcov zasahuje $m + 2014$ diagonál, navyše $P$ z nich je prázdnych. Použitím vlastnosti (V) teraz vieme, že vyfarbené políčka budú pred pretnutím $PT(m)$ vo výške $P+1$. Preto v $PT(m)$ musí byť presne $(2014 - P)$ vyfarbených políčok (každý zo stĺpcov v úseku $[m-(2014-P), m]$ obsahuje práve jedno vyfarbené políčko vo výške aspoň $P+1$). Následne v $LT(m+1)$ je presne $P$ prázdnych diagonál a to znamená, že vyfarbené políčka medzi $LT(m+1)$ a $PT(n)$ sú vo výške $P+1 = b$ a preto

$$\sum_{j=m+1}^{n} a_j - b = \left( \sum_{j=m+1}^{m+2015-P} a_j - b \right) + \left( \sum_{j=m+2015-P}^{n-2014+P} 0 \right) + \left( \sum_{j=n-2014+P}^{n} a_j - b \right). \quad (1)$$

Prvá zátvorka (zodpovedajúca $LT(m+1)$) sa dá odhadnúť, pretože

$$1 \leqq a_{m+1} \leqq a_{m+2} \leqq \ldots \leqq a_{m+2015-p} = P + 1 = b,$$

z čoho

$$-1007^2 \leqq -P(2014 - P) \leqq \sum_{j=m+1}^{m+2015-P} -P \leqq \sum_{j=m+1}^{m+2015-P} a_j - b \leqq 0, \tag{2}$$

pričom v prvej nerovnosti sme využili AG-nerovnosť pre $0 \leqq P = b-1 \leqq 2014$. Podobne dostaneme

$$0 \leqq \sum_{j=n-2014+P}^{n} a_j - b \leqq P(2014 - P) \leqq 1007^2, \tag{3}$$

čo sme potrebovali. Spojením nerovností (1), (2) a (3) je dôkaz hotový.