65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh IMO*

---

1. *Trojuholník BCF má pravý uhol pri vrchole B. Nech A je bod priamky CF taký, že $|FA| = |FB|$ a bod F leží medzi bodmi A a C. Nech bod D je taký, že $|DA| = |DC|$ a priamka AC je osou uhla DAB. Nech bod E je taký, že $|EA| = |ED|$ a priamka AD je osou uhla EAC. Nech bod M je stred úsečky CF. Nech bod X je taký, že $AMXE$ je rovnobežník (pričom $AM \parallel EX$ a $AE \parallel MX$). Dokážte, že priamky BD, FX a ME prechádzajú tým istým bodom.* (Belgicko)

Riešenie. Označme $|\measuredangle FAB| = |\measuredangle FBA| = \varphi$. Trojuholníky AFB a ADC sú podľa vety *uu* podobné, lebo platí $|\measuredangle FAB| = |\measuredangle DAC| = |\measuredangle FBA| = |\measuredangle DCA| = \varphi$. Preto pre ich pomery strán platí

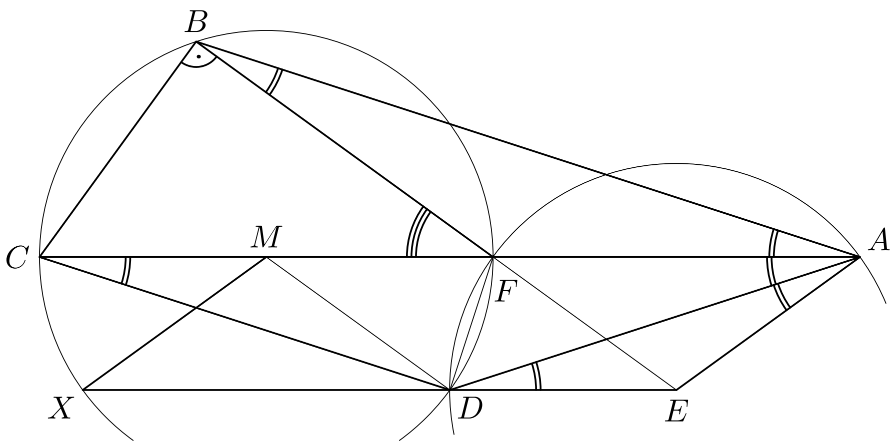
$$\frac{|BA|}{|AF|} = \frac{|CA|}{|AD|}.$$

No z rovnosti týchto pomerov a $|\measuredangle FAB| = |\measuredangle DAC|$ vyplýva, že aj trojuholníky AFD a ABC sú podobné podľa vety *sus*. Preto $|\measuredangle AFD| = |\measuredangle ABC| = 90^\circ + \varphi$. Z rovnoramenného trojuholníka ADE ľahko vypočítame, že $|\measuredangle AED| = 180^\circ - 2|\measuredangle DAE| = 180^\circ - 2\varphi$. Keď uvažujeme kružnicu so stredom v bode E a polomerom $|EA| = |ED|$, tak obvodový uhol nad tetivou AD bude $|\measuredangle AED|/2 = 90^\circ - \varphi$. Keďže $|\measuredangle AFD| = 180^\circ - (90^\circ - \varphi)$ a bod F leží v opačnej polrovine určenej priamkou AD ako bod E, aj bod F musí ležať na tejto kružnici. Preto $|EA| = |ED| = |EF|$. Trojuholník AFE je rovnoramenný a máme $|\measuredangle AFE| = 2\varphi$.

Keďže súčet uhlov v trojuholníku FAB je 180°, platí $|\measuredangle CFB| = |\measuredangle FBA| + |\measuredangle FAB| = 2\varphi$. Vidíme, že $|\measuredangle CFB| = |\measuredangle AFE|$, a preto body B, F, E ležia na jednej priamke.

Ďalej keďže $|\measuredangle DEA| + |\measuredangle EAM| = 180^\circ$, tak $DE \parallel AM$, a preto aj body X, D, E ležia na jednej priamke. Ľahko dopočítame, že $|\measuredangle DFC| = 180^\circ - |\measuredangle DFA| = 90^\circ - \varphi$, a potom z trojuholníka CDF máme $|\measuredangle CDF| = 180^\circ - |\measuredangle DFC| - |\measuredangle FCD| = 90^\circ$.

Vidíme, že body C, D, F, B ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom CF (obr. 1). Jej stred je M, a preto platí $|MD| = |MB| = |MF|$. Dopočítame aj $|\measuredangle FMD| = 2|\measuredangle FCD| = 2\varphi = |\measuredangle FAE|$. Z tohto vzťahu vyplýva, že $DEAM$ je rovnoramenný lichobežník, a preto $|MD| = |AE|$.



Obr. 1

Teraz sa pozrime na všetky dĺžkové vzťahy, ktoré sme ukázali. Vidíme, že platí $|MF| = |MD|$ a tiež $|EF| = |ED|$. Z tohto vyplýva, že body E a D sú osovo súmerné podľa priamky EM. Taktiež $|BM| = |MD| = |AE| = |XM|$, kde posledný vzťah vyplýva z toho, že $AMXE$ je rovnobežník. A napokon $|EB| = |BF| + |FE| = |AF| + |AE| = |AF| + |MD| = |AF| + |MF| = |AM| = |XE|$. Z posledných dvoch rovností vyplýva, že aj body X a B sú osovo súmerné podľa priamky ME.

Potom však aj priamky FX a DB sú osovo súmerné podľa priamky ME a musia sa pretínať na ME, čo sme mali dokázať.

---

2. *Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré sa dá do každého políčka tabuľky $n \times n$ napísať práve jedno z písmen I, M a O tak, že platia obe nasledujúce podmienky:*

- *V každom riadku aj v každom stĺpci obsahuje jedna tretina políčok písmeno I, jedna tretina políčok písmeno M a jedna tretina políčok písmeno O.*
- *V každom šikmom rade, ktorého počet políčok je násobkom troch, obsahuje jedna tretina políčok písmeno I, jedna tretina políčok písmeno M a jedna tretina políčok písmeno O.*

Poznámka. Riadky a stĺpce tabuľky $n \times n$ sú označené kladnými celými číslami od 1 do n v obvyklom poradí, takže každé jej políčko zodpovedá dvojici kladných celých čísel (i, j), kde $1 \leqq i, j \leqq n$. Ak $n > 1$, tak tabuľka má $4n - 2$ šikmých radov dvoch typov. Šikmý rad prvého typu obsahuje práve všetky políčka (i, j) také, že $i + j$ je konštanta, a šikmý rad druhého typu obsahuje práve všetky políčka (i, j) také, že $i - j$ je konštanta.

(*Austrália*)

Riešenie. Najprv ukážeme, že $n = 9k$ vyhovuje pre každé prirodzené k. Pre $n = 9$ to vieme urobiť takto:

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

Pre ostatné násobky 9 to spravíme tak, že tabuľku $9k \times 9k$ zložíme z $k \times k$ takýchto štvorcov 9×9. Takto vytvorená tabuľka bude spĺňať podmienku o riadkoch a stĺpcoch, lebo každá tabuľka 9×9 ju spĺňa. A tiež bude spĺňať aj podmienku o šikmých radoch, lebo prienik šikmého radu, ktorý ma počet políčok deliteľný troma, s nejakou tabuľkou 9×9 je zasa šikmý rad, ktorého počet políčok je deliteľný troma. A preto v každej jeho časti je rovnako veľa políčok vyplnených I, M, O.

Teraz predpokladajme, že máme vyhovujúcu tabuľku veľkosti $n \times n$. Keďže tretina políčok z riadku je vyplnená písmenom I, zrejme $n = 3k$ pre vhodné prirodzené k. Celá tabuľka sa potom skladá z $k \times k$ štvorcov 3×3. Nazvime stredy týchto štvorcov 3×3 *magické* políčka. Tiež budeme hovoriť, že *magické línie* sú riadky alebo stĺpce, ktoré obsahujú aspoň jedno magické políčko (a tým pádom ich obsahujú k). Spočítajme teraz dvojice (l, p), kde l je magická línia a p je v nej ležiace políčko, na ktorom je napísané I.

Toto číslo označíme A. Keďže magických línii je $2k$ a v každej je k políčok s písmenom I, máme $A = 2k^2$.

Teraz spočítame dvojice (s, p), kde s je šikmý rad s počtom políčok deliteľným 3 a p je políčko v ňom, na ktorom je napísané I. Toto číslo označíme B. V šikmých radoch smerom hore doprava je spolu $3k^2$ políčok, tak za tieto šikmé rady napočítame k^2 takých dvojíc. Za tie opačným smerom tiež, a preto $B = 6k^2$. Keď však spočítame $A + B$, tak sme spočítali dvojice (r, p), kde r je buď šikmý rad s počtom políčok deliteľným 3, alebo magická línia a p je políčko na nej, na ktorom je napísané I. A každé políčko na ktorom je napísané I patrí do práve jednej takej dvojice, okrem magických políčok. Tie patria do štyroch. A keďže v celej tabuľke je tretina, t. j. $3k^2$ písmen I, tak $A+B = 2k^2+3M$, kde M je počet magických políčok na ktorých je napísané I. Z toho dostaneme, že $3M = 4k^2$, z čoho vyplýva, že k musí byť deliteľné 3, keďže M je celé číslo. Preto n musí byť deliteľné 9.

Záver je ten, že vyhovujú všetky prirodzené čísla n deliteľné 9.

---

3. *Nech $\mathcal{P}$, kde $\mathcal{P} = A_1A_2 \ldots A_k$, je konvexný mnohouholník v rovine. Jeho vrcholy A_1, A_2, ..., A_k majú celočíselné súradnice a ležia na kružnici. Nech S je obsah mnohouholníka $\mathcal{P}$. Nech n je nepárne kladné celé číslo také, že druhé mocniny dĺžok strán mnohouholníka $\mathcal{P}$ sú celé čísla deliteľné n. Dokážte, že $2S$ je celé číslo deliteľné n.*

(*Rusko*)

Riešenie. Na začiatok si uvedomíme, že $2S$ je vždy celé číslo, a preto má zmysel ukazovať, že je deliteľné n. Platí dokonca, že dvojnásobok obsahu ľubovoľného mnohouholníka s vrcholmi v mrežových bodoch je celé číslo. Pre trojuholníky to totiž platí, stačí im opísať obdĺžnik (s celočíselným obsahom) a od neho sa už len odčítajú pravouhlé trojuholníky, ktorých obsah je polovica celého čísla. A keďže každý mnohouholník sa dá rozdeliť na trojuholníky, tak to platí pre každý mnohouholník.

Najprv tvrdenie ukážeme pre trojuholník. Keďže druhé mocniny dĺžok jeho strán sú deliteľné n, nech sú to na, nb, nc. Potom dĺžky strán tohto trojuholníka sú $\sqrt{na}$, $\sqrt{nb}$, $\sqrt{nc}$, kde samozrejme a, b, c sú prirodzené čísla. Potom z Herónovho vzorca pre obsah trojuholníka vieme, že

$$\begin{aligned}16S^2 &= (\sqrt{na} + \sqrt{nb} + \sqrt{nc}) \cdot (-\sqrt{na} + \sqrt{nb} + \sqrt{nc}) \cdot \\ &\quad \cdot (\sqrt{na} - \sqrt{nb} + \sqrt{nc}) \cdot (\sqrt{na} + \sqrt{nb} - \sqrt{nc}) = \\ &= n^2(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).\end{aligned}$$

Z toho vieme, že $n^2 \mid 16S^2$, ale keďže n je nepárne, nutne $n^2 \mid 4S^2$, a teda $n \mid 2S$.

Pre $k \geqq 4$, tvrdenie dokážeme indukciou. Začneme tým, že zrejme tvrdenie stačí dokázať pre n, ktoré sú mocninou prvočísla. Potom to totiž bude platiť pre ľubovoľný súčin mocnín prvočísel, čo znamená, že to bude platiť pre ľubovoľné n. Nech teda $n = p^l$, kde p je prvočíslo. Ak by pre niektorú uhlopriečku k-uholníka platilo, že druhá mocnina jej dĺžky je deliteľná n, tak ňou môžeme k-uholník rozdeliť na dva menšie, a tie by mali z indukčného predpokladu dvojnásobok obsahu deliteľný n. Preto predpokladajme, že taká uhlopriečka neexistuje.

Budeme hovoriť, že $v_p(a) = m$, ak $p^m \mid a$ a zároveň $p^{m+1} \nmid a$. Inými slovami to hovorí, koľkokrát sa p nachádza v prvočíselnom rozklade a. $v_p(a)$ sa nazýva *p-valuácia a*. Zoberme teraz takú stranu k-uholníka, že $v_p(|A_iA_{i+1}|^2)$ je minimálna. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to strana A_1A_2. Teraz dokážeme jedno pomocné tvrdenie.

Lema. Ak neexistuje uhlopriečka taká, že jej druhá mocnina je deliteľná $n = p^l$, tak pre všetky $2 \leqq i \leqq k-1$ platí $v_p(|A_1A_i|^2) > v_p(|A_1A_{i+1}|^2)$.

Dôkaz. Pre $i = 2$ to platí triviálne, lebo zo zadania vieme, že $v_p(|A_1A_2|^2) \geqq l$ a z predpokladu o uhlopriečkach máme $v_p(|A_1A_3|^2) < l$. Pre ostatné i to ukážeme indukciou. Nech tvrdenie platí pre $i-1$, dokážeme ho pre i. Predpokladajme (sporom), že $v_p(|A_1A_i|^2) \leqq v_p(|A_1A_{i+1}|^2)$.

Pozrime sa na štvoruholník $A_1A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Zo zadania je tetivový, preto z Ptolemaiovej vety[1] platí

$$|A_1A_{i-1}| \cdot |A_iA_{i+1}| + |A_iA_{i-1}| \cdot |A_1A_{i+1}| = |A_1A_i| \cdot |A_{i-1}A_{i+1}|.$$

Po umocnení na druhú dostaneme

$$\begin{aligned}&|A_1A_{i-1}|^2 \cdot |A_iA_{i+1}|^2 + |A_iA_{i-1}|^2 \cdot |A_1A_{i+1}|^2 + \\ &\qquad + 2 \cdot |A_1A_{i-1}| \cdot |A_iA_{i-1}| \cdot |A_1A_{i+1}| \cdot |A_iA_{i+1}| = |A_1A_i|^2 \cdot |A_{i-1}A_{i+1}|^2.\end{aligned}$$

Keďže druhé mocniny dĺžok strán a uhlopriečok sú určite celé čísla, aj $2 \cdot |A_1A_{i-1}| \cdot |A_iA_{i-1}| \cdot |A_1A_{i+1}| \cdot |A_iA_{i+1}|$ je celé číslo. Odhadnime teraz p-valuácie jednotlivých členov. Označme $v = v_p(|A_1A_i|^2)$. Potom

$$\begin{aligned}v_p(|A_1A_{i-1}|^2 \cdot |A_iA_{i+1}|^2) &= v_p(|A_1A_{i-1}|^2) + v_p(|A_iA_{i+1}|^2) > v + l,\\ v_p(|A_iA_{i-1}|^2 \cdot |A_1A_{i+1}|^2) &= v_p(|A_iA_{i-1}|^2) + v_p(|A_1A_{i+1}|^2) \geqq l + v.\end{aligned}$$

Využili sme indukčný predpoklad, predpoklad $v \leqq v_p(|A_1A_{i+1}|^2)$ a tiež to, že druhé mocniny dĺžok strán sú deliteľné n, a preto je ich p-valuácia aspoň l. Tak isto dostaneme odhad

$$v_p(4 \cdot |A_1A_{i-1}|^2 \cdot |A_iA_{i-1}|^2 \cdot |A_1A_{i+1}|^2 \cdot |A_iA_{i+1}|^2) > 2(v + l).$$

Keďže $2 \cdot |A_1A_{i-1}| \cdot |A_iA_{i-1}| \cdot |A_1A_{i+1}| \cdot |A_iA_{i+1}|$ je celé číslo, platí

$$2 \cdot |A_1A_{i-1}| \cdot |A_iA_{i-1}| \cdot |A_1A_{i+1}| \cdot |A_iA_{i+1}| > v + l.$$

Vidíme, že p-valuácia každého člena na ľavej strane je aspoň $v+l$. Preto je aj p-valuácia celej ľavej strany aspoň $v+l$. Ale $A_{i-1}A_{i+1}$ je uhlopriečka a preto $v_p(|A_{i-1}A_{i+1}|^2) < l$. Preto dostávame

$$v_p(|A_1A_i|^2 \cdot |A_{i-1}A_{i+1}|^2) = v_p(|A_1A_i|^2) + v_p(|A_{i-1}A_{i+1}|^2) < v + l.$$

To je ale spor, pretože p-valuácie oboch strán sa samozrejme musia rovnať. Tým je lema dokázaná.

Z lemy vyplýva, že $v_p(|A_1A_2|^2) > v_p(|A_1A_3|^2) > \ldots > v_p(|A_1A_k|^2)$. To je ale spor s predpokladom, že $|A_1A_2|^2$ má najmenšiu p-valuáciu zo všetkých druhých mocnín strán. Tak konečne dostávame spor aj s tým, že neexistuje uhlopriečka, ktorej druhá mocnina dĺžky je deliteľná n. Preto taká existuje a pre ten prípad sme už tvrdenie dokázali. Tým je celý dôkaz ukončený.

[1] Ptolemaiova veta hovorí, že ak A, B, C, D ležia na kružnici v tomto poradí, tak $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |CB| = |AC| \cdot |BD|$.

4. *Množinu kladných celých čísel nazveme voňavá, ak obsahuje aspoň dva prvky a každý jej prvok má s nejakým iným jej prvkom aspoň jedného spoločného prvočíselného deliteľa. Nech $P(n) = n^2 + n + 1$. Nájdite najmenšie kladné celé číslo b také, že existuje nezáporné celé číslo a také, že množina*

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

je voňavá. (*Luxembursko*)

Riešenie. Označme (a, b) najmenší spoločný deliteľ čísel a a b. Dokážeme nasledujúce pomocné tvrdenia:

Tvrdenie 1. Ak n je prirodzené číslo, tak $(P(n), P(n+1)) = 1$.

Dôkaz. Keďže číslo $n^2 + n + 1$, čiže $n(n+1) + 1$, je nepárne, platí

$$\begin{aligned}(P(n), P(n+1)) &= (n^2 + n + 1, n^2 + 3n + 3) = (n^2 + n + 1, 2n + 2) = \\ &= (n^2 + n + 1, 2(n+1)) = (n^2 + n + 1, n + 1) = \\ &= (n(n+1) + 1, n + 1) = (1, n + 1) = 1.\end{aligned}$$

Tvrdenie 2. Ak $n \equiv 2 \pmod 7$, tak $(P(n), P(n+2)) = 7$; ak $n \not\equiv 2 \pmod 7$, tak $(P(n), P(n+2)) = 1$.

Dôkaz. Keďže $(2n+7)P(n) - (2n-1)P(n+2) = 14$ a číslo $P(n)$ je nepárne, číslo $(P(n), P(n+2))$ je deliteľom 7. Ak $q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tak platí

$$P(7k+q) \equiv (7k+q)^2 + (7k+q) + 1 \equiv q^2 + q + 1 \pmod 7.$$

Zistime teda zvyšky po delení 7 pre samotné zvyšky:

q	$P(q)$	$P(q) \pmod 7$
0	1	1
1	3	3
2	7	0
3	13	6
4	21	0
5	31	3
6	43	1

Z toho už vyplýva dokazované tvrdenie.

Tvrdenie 3. Ak $n \equiv 1 \pmod 3$, tak 3 delí $(P(n), P(n+3))$; ak $n \not\equiv 1 \pmod 3$, tak $(P(n), P(n+3)) = 1$.

Dôkaz. Keďže $(n+5)P(n) - (n-1)P(n+3) = 18$ a číslo $P(n)$ je nepárne, číslo $(P(n), P(n+3))$ je deliteľom 9. Ak $q \in \{0, 1, 2\}$, tak platí

$$P(3k+q) \equiv (3k+q)^2 + (3k+q) + 1 \equiv q^2 + q + 1 \pmod 3.$$

Zistime teda zvyšky po delení 3 pre samotné zvyšky:

q	$P(q)$	$P(q) \pmod 3$
0	1	1
1	3	3
2	7	1

Z toho už vyplýva dokazované tvrdenie.

Tvrdenie 4. Ak $n \equiv 7 \pmod{19}$ alebo ak $n \equiv 11 \pmod{19}$, tak 19 delí $P(n)$.

Dôkaz. Ak $q \in \{0, 1, \ldots, 18\}$, tak platí

$$P(19k + q) \equiv (19k + q)^2 + (19k + q) + 1 \equiv q^2 + q + 1 \pmod{19}.$$

A keďže platí $P(7) = 7^2 + 7 + 1 = 57$ a $P(11) = 11^2 + 11 + 1 = 133$ a 19 delí 57 aj 133, tvrdenie je dokázané.

Predpokladajme, že existuje voňavá množina, ktorá má práve 5 prvkov, nech sú to $P(a)$, $P(a+1)$, $P(a+2)$, $P(a+3)$, $P(a+4)$.

Podľa tvrdenia 1 je $P(a+2)$ nesúdeliteľné s $P(a+1)$ aj s $P(a+3)$, musí mať teda spoločného prvočíselného deliteľa s $P(a)$ alebo s $P(a+4)$, t. j. $(P(a), P(a+2)) > 1$ alebo $(P(a+2), P(a+4)) > 1$. Podľa tvrdenia 2 preto platí $a \equiv 2 \pmod 7$ alebo $a + 2 \equiv 2 \pmod 7$. V ani jednom prípade však neplatí $a + 1 \equiv 2 \pmod 7$, takže $(P(a+1), P(a+3)) = 1$.

Číslo $P(a+1)$ teda nie je súdeliteľné s $P(a)$ ani s $P(a+2)$ ani s $P(a+3)$, musí byť preto podľa zadania súdeliteľné s $P(a+5)$. Analogicky musí byť $P(a+4)$ súdeliteľné s $P(a)$. Podľa tvrdenia 3 to však znamená, že $a + 1 \equiv 1 \pmod 3$ aj $a \equiv 1 \pmod 3$, čo je spor. Voňavá množina s 5 prvkami teda neexistuje.

Ani voňavá množina s menej než 5 prvkami neexistuje, lebo sme ukázali, že $P(a+1)$ nie je súdeliteľné s $P(a)$, s $P(a+2)$ ani s $P(a+3)$.

Ukážeme, že voňavá množina so 6 prvkami existuje. Podľa čínskej vety o zvyškoch existuje a také, že $a \equiv 7 \pmod{19}$, $a + 1 \equiv 2 \pmod 7$ a $a + 2 \equiv 1 \pmod 3$, a to napríklad 197. Podľa tvrdenia 2 sú čísla $P(a+1)$ a $P(a+3)$ deliteľné 7, podľa tvrdenia 3 sú čísla $P(a+2)$ a $P(a+5)$ deliteľné 3 a podľa tvrdenia 4 sú čísla $P(a)$ a $P(a+4)$ deliteľné 19. To však znamená, že množina $\{P(a), P(a+1), P(a+2), P(a+3), P(a+4), P(a+5)\}$ je voňavá.

Najmenšie vyhovujúce b je teda 6.

---

5. *Na tabuli je napísaná rovnica*

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

s 2016 lineárnymi dvojčlenmi na každej strane. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú je možné vymazať práve k z týchto 4032 dvojčlenov tak, že na každej strane ostane aspoň jeden dvojčlen a výsledná rovnica nebude mať žiaden reálny koreň. (Rusko)

Riešenie. Keďže na oboch stranách rovnosti je 2016 spoločných lineárnych dvojčlenov, potrebujeme každý z nich vymazať aspoň z jednej strany. Spolu ich teda treba vymazať aspoň 2016.

Ukážeme, že tento počet je postačujúci. Stačí totiž vymazať z ľavej strany všetky činitele tvaru $x-(4k+2)$ a $x-(4k+3)$ a z pravej všetky tvaru $x-(4k+1)$ a $x-(4k+4)$, kde $k \in \{0, 1, \dots, 503\}$. Treba teda ukázať, že rovnica

$$\prod_{i=0}^{503}(x-(4i+1))(x-(4i+4)) = \prod_{i=0}^{503}(x-(4i+2))(x-(4i+3)) \tag{1}$$

nemá žiaden reálny koreň.

Nech x je ľubovoľné reálne číslo. Rozoberme prípady:

- ▷ Nech $x \in \{1, 2, \dots, 2016\}$. V takom prípade je jedna zo strán nulová, kým druhá nie. Číslo x teda nie je koreňom rovnice (1).
- ▷ Nech $4k+1 < x < 4k+2$ alebo $4k+3 < x < 4k+4$, kde $k \in \{0, 1, \dots, 503\}$. Potom $(x-(4k+1))(x-(4k+4)) < 0$, ale ak $i \in \{0, 1, \dots, 503\}$ a $i \neq k$, tak $(x-(4i+1))(x-(4i+4)) > 0$, takže celá ľavá strana rovnice (1) je záporná. Avšak ak $i \in \{0, 1, \dots, 503\}$, tak $(x-(4i+2))(x-(4i+3)) > 0$, takže celá pravá strana rovnice (1) je kladná. Číslo x teda nie je koreňom (1).
- ▷ Nech $x < 1$ alebo $x > 2016$ alebo $4k < x < 4k+1$, kde $k \in \{1, 2, \dots, 503\}$. V takom prípade môžeme (1) prepísať do tvaru

$$1 = \prod_{i=0}^{503} \frac{(x-(4i+1))(x-(4i+4))}{(x-(4i+2))(x-(4i+3))} = \prod_{i=0}^{503}\left(1 - \frac{2}{(x-(4i+2))(x-(4i+3))}\right).$$

  Avšak ak $i \in \{0, 1, \dots, 503\}$, tak $(x-(4i+2))(x-(4i+3)) > 2$, a teda

$$0 < 1 - \frac{2}{(x-(4i+2))(x-(4i+3))} < 1.$$

  Súčin takýchto čísel je preto tiež menší než 1. Číslo x teda nie je koreňom rovnice (1).
- ▷ Nech $4k+2 < x < 4k+3$, kde $k \in \{0, 1, \dots, 503\}$. V takom prípade môžeme (1) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \cdot \prod_{i=1}^{503} \frac{(x-4i)(x-(4i+1))}{(x-(4i-1))(x-(4i+2))} = \\ &= \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \cdot \prod_{i=1}^{503}\left(1 + \frac{2}{(x-(4i-1))(x-(4i+2))}\right). \end{aligned}$$

  Avšak ak $i \in \{1, 2, \dots, 503\}$, tak $(x-(4i-1))(x-(4i+2)) > 0$, a teda

$$1 + \frac{2}{(x-(4i-1))(x-(4i+2))} > 1.$$

  A keďže platí aj $(x-1)/(x-2) > 1$ a $(x-2016)/(x-2015) > 1$, aj celý súčin je väčší než 1. Číslo x teda nie je koreňom (1).

Rozobrali sme všetky prípady, rovnica (1) teda nemá reálne riešenie. To znamená, že minimálny počet lineárnych faktorov, ktoré treba vymazať z pôvodnej rovnice, je 2016.

6. *V rovine leží n úsečiek, kde $n \geqq 2$, a to tak, že každé dve majú spoločný vnútorný bod, ale žiadne tri rôzne nemajú spoločný bod. Bohuš pre každú z nich vyberie jeden jej koncový bod, položí naň žabu a otočí ju smerom k druhému koncovému bodu tejto úsečky. Potom bude $(n-1)$-krát tlieskať. Vždy keď tleskne, každá žaba okamžite skočí na nasledujúci priesečník na svojej úsečke. Žaba nikdy nemení smer svojich skokov. Bohuš si želá umiestniť žaby tak, aby žiadne dve z nich nikdy neboli v tom istom okamihu na tom istom priesečníku.*

a) Dokážte, že ak n je nepárne, Bohuš si toto svoje želanie splniť môže.

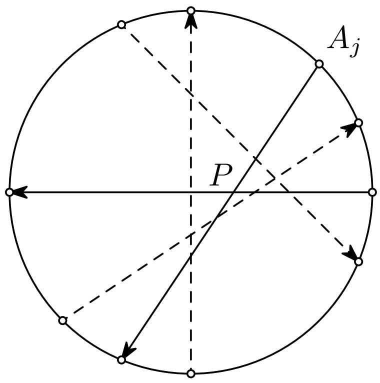
b) Dokážte, že ak n je párne, Bohuš si toto svoje želanie splniť nemôže.

(Česká rep., Josef Tkadlec)

Riešenie. Majme kružnicu k dostatočne veľkú na to, aby sa do nej zmestili všetky uvažované úsečky. Každú z týchto úsečiek predĺžme na priamku p_i, kde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tá nech pretína kružnicu k v rôznych bodoch A_i a B_i. Tieto body označme za „naše". Keďže každé dve úsečky sa pretínajú vnútri kružnice k, pre každé i z $\{1, 2, \ldots, n\}$ leží vnútri každého z oblúkov medzi bodmi A_i a B_i ďalších $n-1$ našich bodov.

a) Každý z $2n$ našich bodov označme slovami „dnu" a „von" tak, aby sa tieto dve slová po obvode kružnice k pravidelne po jednom striedali. Číslo $n-1$ je párne, body A_i a B_i teda majú rôzne označenia – pri jednom z nich je „dnu" a pri druhom „von". Tým je určená orientácia priamky p_i. Bez ujmy na všeobecnosti tiež môžeme predpokladať, že A_i sú práve tie body, pri ktorých je značka „dnu".

Bohušovi teraz stačí pre každú úsečku priamky p_i položiť žabu na ten jej krajný bod, ktorý je bližšie k bodu A_i. Tvrdíme, že žaby na rôznych priamkach p_i a p_j sa nikdy nestretnú na tom istom bode. Ak by áno, musel by to byť ich priesečník, ktorý označme P.

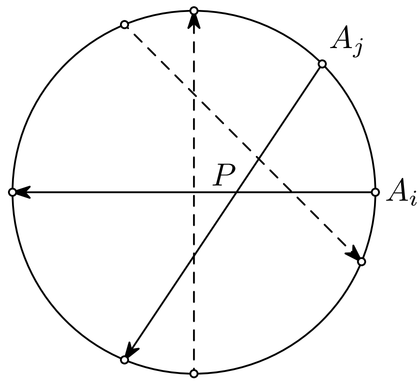


Obr. 2

Uvedomme si že na oblúku A_iA_j kružnice k je nepárny počet našich bodov. Každý z týchto bodov patrí nejakej priamke p_h, kde h je rôzne od i aj od j. Táto priamka podľa zadania nemôže prechádzať bodom P, musí preto pretínať práve jednu z úsečiek PA_i a PA_j. Na týchto úsečkách sa tak vytvorí spolu nepárny počet priesečníkov. Zvyšné priamky nepretínajú uvažovaný oblúk A_iA_j a neprechádzajú ani bodom P, takže pretínajú buď obe úsečky PA_i a PA_j, alebo ani jednu. Na týchto úsečkách sa tak pridá istý párny počet priesečníkov. Celkový počet priesečníkov na úsečkách PA_i a PA_j (okrem bodu P) je preto nepárny. Ak sa však majú žaby stretnúť v bode P, musí byť na každej z úsečiek PA_i a PA_j rovnaký počet priesečníkov, a teda ich celkový počet musí byť párny, čo je spor.

b) Majme ľubovoľné Bohušovo rozmiestnenie žiab. Vzniknuté „naše“ body označme slovami „dnu“ a „von“ tak, aby príslušná orientácia priamky zodpovedala smeru pohybu jej žaby. Opäť bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že A_i sú práve tie body, pri ktorých je značka „dnu“.

Uvedomme si, že tentokrát sa tieto dve slová po obvode kružnice k pravidelne striedať nemôžu, lebo medzi A_i a B_i, ktoré majú rôzne označenia, leží nepárny počet $(n-1)$ našich bodov. To znamená, že existujú dva naše body A_i a A_j, medzi ktorými už nie je žiaden iný náš bod. Označme P priesečník priamok p_i a p_j.



Obr. 3

Zvyšné priamky pretínajú buď obe úsečky PA_i a PA_j, alebo ani jednu. Na týchto úsečkách tak vznikne rovnaký počet priesečníkov. To však znamená, že žaby z priamok p_i a p_j sa stretnú v bode P.