66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017

Riešenia úloh IMO

---

1. *Pre dané celé číslo $a_0 > 1$ definujeme postupnosť a_0, a_1, a_2, … tak, že pre všetky $n \geqq 0$ platí*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ak } \sqrt{a_n} \text{ je celé číslo,} \\ a_n + 3 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte všetky hodnoty a_0, pre ktoré existuje také číslo A, že pre nekonečne veľa indexov n platí $a_n = A$. (Južná Afrika)

Riešenie. Riešenie rozdelíme na niekoľko častí. Najprv predpokladajme, že $3 \mid a_1$. Indukciou dokážeme, že potom aj každý ďalší člen je deliteľný 3: Ak $3 \mid a_n$, tak $3 \mid a_n + 3$. A tak isto ak a_n je štvorec a $3 \mid a_n$, tak aj $3 \mid \sqrt{a_n}$.

Zoberme štvorec deliteľný 3, ktorý je väčší ako a_1, t. j. nájdime prirodzené k také, že $9k^2 > a_1$. Indukciou ľahko dokážeme, že $a_n \leqq 9k^2$ pre všetky n. Totiž pre prvý člen to platí, a ak $a_n < 9k^2$, tak dostávame, že $a_{n+1} \leqq a_n + 3 \leqq 9k^2$, pretože a_n je deliteľné 3. No a v prípade, že $a_n = 9k^2$, je $a_{n+1} = 3k < 9k^2$, čím je dôkaz indukciou ukončený.

To ale znamená, že naša postupnosť je ohraničená – a nachádza sa v nej len konečne veľa rôznych hodnôt, a preto aspoň jedna z nich sa v nej musí vyskytovať nekonečne veľakrát.

Teraz predpokladajme, že a_1 nie je deliteľné 3. Najprv predpokladajme, že $a_n \equiv 2 \pmod 3$ pre nejaký index n. Keďže žiadna druhá mocnina nedáva zvyšok 2 po delení 3, od tohto momentu bude každý ďalší člen o 3 väčší a celá postupnosť (od a_n) bude rastúca. Preto nebude existovať číslo, ktoré je v danej postupnosti nekonečne veľakrát.

Teraz ukážeme, že ak a_1 nie je deliteľné 3, tak existuje taký index n, pre ktorý bude $a_n \equiv 2 \pmod 3$. V prípade, že $a_1 \equiv 2 \pmod 3$, máme tvrdenie dokázané hneď. Tiež to platí pre $a_1 = 4$, nakoľko dostávame $a_2 = 2$, takže to platí pre $a_1 \leqq 4$. Ďalej to dokážeme indukciou. Nech tvrdenie platí pre všetky $a_1 \leqq 3k+1$. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre všetky $a_1 \leqq 3k+4$. Zrejme jediný zaujímavý prípad je $a_1 = 3k+4$, nakoľko pre $a_1 = 3k+2$ to je triviálne.

Postupnosť bude stále rásť o 3, až kým „nenarazí“ na nejaký štvorec. Vieme, že $3k+4 < (3k+1)^2 \Leftrightarrow 9k^2+3k > 3$, keďže $k \geqq 1$. A keďže postupnosť nadobúda postupne všetky čísla so zvyškom 1 po delení 3 až kým nenarazí na štvorec, je jasné, že keď narazí na štvorec, tak to bude štvorec čísla, ktoré nie je deliteľné 3 a ktoré je nanajvýš $3k+1$. A zároveň celý čas platí, že $a_n > 1$, lebo ak $a_n > 1$, tak aj $\sqrt{a_n} > 1$. To znamená, že existuje nejaký index m, pre ktorý je $1 < a_m \leqq 3k+1$ a $3 \nmid a_m$. Teraz už len využijeme indukčný predpoklad a dostávame, že tvrdenie platí aj pre $a_1 = 3k+4$.

Keď to zhrnieme, dostávame, že ak $3 \nmid a_1$, tak postupnosť bude od istého člena rastúca, a preto tvrdenie neplatí. Naopak pre všetky a_1 deliteľné 3 máme dokázanú platnosť tvrdenia. Záver je ten, že vyhovujú práve tie a_1, ktoré sú deliteľné 3.

---

2. *Označme $\mathbb{R}$ množinu reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí*

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

(*Albánsko*)

Riešenie. Dosaďme do rovnosti zo zadania také x, y, pre ktoré platí $xy = x + y$, čiže $y = x/(x-1)$. Dostaneme

$$f\left(f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0 \qquad \text{pre všetky } x \neq 1. \tag{1}$$

V prípade, že $f(x) = 0$ pre nejaké $x \neq 1$, zo vzťahu (1) dostávame, že aj $f(0) = 0$. Potom po dosadení $[0, y]$ máme $f(y) = 0$ pre všetky reálne y. Skúškou ľahko overíme, že táto funkcia vyhovuje. Ďalej môžeme predpokladať, že $f(x) \neq 0$ pre $x \neq 1$. Na druhej strane z (1) vidíme, že naša funkcia nejaký nulový bod má (v bodoch $f(x)f(x/(x-1))$). To znamená, že nulová hodnota funkcie f musí byť práve v bode 1, čiže $f(1) = 0$.

Po dosadení $x = 0$ do (1) máme $f(f(0)^2) = 0$, čiže nutne $f(0)^2 = 1$. Navyše si môžeme všimnúť, že ak vyhovuje funkcia f, tak vyhovuje aj funkcia $-f$. Preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $f(0) = -1$.

Teraz môžeme dosadiť $[x, 1]$, dostaneme

$$-1 + f(x+1) = f(x). \tag{2}$$

Z toho indukciou ľahko ukážeme, že $f(n) = n - 1$ pre všetky celé čísla n.

Následne ukážeme, že funkcia f je prostá. Predpokladajme, že $f(a) = f(b)$ pre nejaké $a \neq b$. Z (2) vyplýva, že potom aj $f(a + N + 1) = f(b + N) + 1$ pre ľubovoľné prirodzené číslo N. Zvolíme x_0, y_0 tak, aby $x_0 + y_0 = a + N + 1$ a $x_0 y_0 = b + N$. Podľa Viètových vzťahov sú hľadané x_0, y_0 riešenia kvadratickej rovnice $x^2 - (a+N)x + {} + (b+N) = 0$. Tá má dve reálne riešenia, ak jej diskriminant je kladný, t. j. ak $(a+N+1)^2 + 4b - 4N > 0$. Je jasné, že nie je problém zvoliť dostatočne veľké N tak, aby to platilo, stačí zjavne $N > -b$.

Po dosadení $[x_0, y_0]$ do rovnosti zo zadania dostaneme, že $f(f(x_0)f(y_0)) = -1$. Keďže jediný bod, v ktorom sa nadobúda funkčná hodnota 0, je 1, zo vzťahu (2) vyplýva, že jediný bod, v ktorom sa nadobúda funkčná hodnota -1, je 0. Preto $f(x_0)f(y_0) = 0$, čiže buď $f(x_0) = 0$, alebo $f(y_0) = 0$. Bez ujmy na všeobecnosti $f(x_0) = 0$, a preto $x_0 = 1$. To ale znamená, že $a + N + 1 = y_0 + 1$ a $b + N = y_0$, čiže $a = b$, čo je spor. Preto je funkcia f prostá.

Teraz dosaďme do rovnosti zo zadania $[t, -t]$. Postupne s využitím (2) a prostosti dostávame

$$\begin{aligned} f(f(t)f(-t)) - 1 &= f(-t^2), \\ f(f(t)f(-t)) &= f(-t^2 + 1), \\ f(t)f(-t) &= -t^2 + 1. \end{aligned}$$

Ďalej dosadíme $[t, 1-t]$ a máme s využitím prostosti a (2)

$$\begin{aligned} f(f(t)f(1-t)) &= f(t - t^2), \\ f(t)f(1-t) &= t - t^2, \\ f(t)f(-t) + f(t) &= t - t^2. \end{aligned}$$

Porovnaním ostatných dvoch vzťahov dostávame $f(t) = t - 1$ pre všetky reálne t. Nezabudnime na to, že sme na začiatku predpokladali, že $f(0)$ je záporné. Preto dostávame ďalšie dve riešenia, a to $f(x) = x - 1$ a $f(x) = 1 - x$. Skúškou overíme, že aj tieto vyhovujú.

Odpoveď. Vyhovujúce funkcie sú $f(x) = x - 1$, $f(x) = 1 - x$ a $f(x) = 0$.

3. *Poľovník a neviditeľný zajac hrajú hru v euklidovskej rovine. Zajacova počiatočná poloha A_0 a poľovníkova počiatočná poloha B_0 sú zhodné. Po $n-1$ kolách sa zajac nachádza v bode A_{n-1} a poľovník v bode B_{n-1}. V n-tom kole sa postupne udejú tieto tri veci:*

i) *Zajac sa neviditeľne presunie do bodu A_n, pričom vzdialenosť medzi A_{n-1} a A_n je presne 1.*

ii) *Sledovacie zariadenie ukáže poľovníkovi bod P_n. Jediná záruka, ktorú sledovacie zariadenie poľovníkovi poskytuje, je, že vzdialenosť medzi bodmi P_n a A_n je nanajvýš 1.*

iii) *Poľovník sa viditeľne presunie do bodu B_n, pričom vzdialenosť medzi B_{n-1} a B_n je presne 1.*

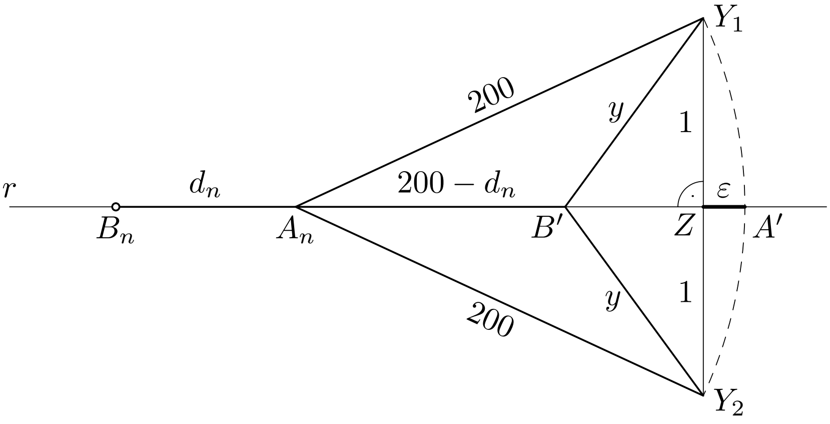
Dokáže poľovník vždy (t. j. bez ohľadu na to, ako sa presúva zajac a bez ohľadu na to, aké body ukazuje sledovacie zariadenie) voliť svoje ťahy tak, že po 10^9 kolách má istotu, že vzdialenosť medzi ním a zajacom je nanajvýš 100? (*Rakúsko*)

Riešenie. Keby bola odpoveď „áno“, tak by mal poľovník stratégiu, ktorá funguje bez ohľadu na to, ako sa zajac hýbe a čo ukazuje sledovacie zariadenie. My ukážeme opak. Ukážeme, že ak má poľovník smolu na to, čo mu ukáže sledovacie zariadenie, tak neexistuje stratégia, ktorá mu zabezpečí, že bude po 10^9 kolách vzdialený od zajaca najviac 100.

Označme d_n vzdialenosť medzi zajacom a poľovníkom po n kolách. Ak sa niekedy stane, že $d_n \geqq 100$ pre $n < 10^9$, tak zajac vie ľahko túto vzdialenosť zachovať. Stačí, ak sa vždy posunie o 1 smerom od poľovníka. Poľovník túto vzdialenosť potom nevie zmenšiť a zajac vyhrá.

Ukážeme, že ak $d_n < 100$, tak bez ohľadu na to, akú stratégiu má poľovník, zajac má spôsob, ktorým zväčší d_n^2 aspoň o $\frac{1}{2}$ každých 200 kôl (ak sledovacie zariadenie ukazuje šťastne v prospech zajaca). Týmto spôsobom dosiahne d_n^2 hodnotu 10 000 za $4 \cdot 10^6 < 10^9$ kôl a zajac vyhrá.

Predpokladajme, že poľovník je v bode B_n a zajac v bode A_n. Zajac sa rozhodne v tomto momente poľovníkovi ukázať. Tým samozrejme len situáciu poľovníkovi uľahčí. Nech r je priamka A_nB_n. Zostrojíme pravouhlý trojuholník A_nZY_1 s pravým uhlom pri vrchole Z tak, že Z leží na polpriamke opačnej k A_nB_n. Navyše nech $|A_nY_1| = 200$ a $|ZY_1| = 1$. Ďalej nech Y_2 je obraz Y_1 v stredovej súmernosti podľa Z ako na obr. 1.



Obr. 1

Zajacov plán je veľmi jednoduchý: Zvolí si jeden z bodov Y_1 a Y_2 a skáče 200 kôl rovno k nemu. Ak bude mať poľovník smolu, tak sledovacie zariadenie ukáže vždy bod na priamke r, ktorá je kolmá projekcia zajacovej polohy na priamku. To znamená, že po 200 kolách ukáže bod Z.

Čo môže poľovník robiť? Môže sa posunúť o 200 po priamke r do bodu B'. Tak sa vzdialenosť medzi poľovníkom a zajacom zväčší na dĺžku úsečky $B'Y_1$. V skutočnosti poľovník nevie urobiť nič lepšie. Vždy totiž skončí niekde „naľavo“ od bodu B'. Ak sa dostane nad priamku r, tak môže mať smolu, že si zajac vybral bod Y_2, ktorý je pod priamkou r a určite jeho vzdialenosť bude väčšia ako dĺžka úsečky $B'Y_1$. Ak skončí pod priamkou r, tak mohol mať smolu, že zajac je v bode Y_1. Skrátka, bez ohľadu na to, čo spraví, môže mať smolu a zajac sa vzdiali na aspoň $|B'Y_1| = |B'Y_2| = y$.

Teraz skúsime odhadnúť y^2. Vieme, že $|A_nB_n| = d_n$. Nech A' je taký bod na polpriamke A_nZ, že $|A_nA'| = 200$ a označme $\varepsilon = |ZA'|$. Zrejme $|A'B'| = d_n$. Potom

$$y^2 = 1 + |B'Z'|^2 = 1 + (d_n - \varepsilon)^2.$$

Vieme tiež, že

$$\varepsilon = 200 - |A_nZ|^2 = 200 - \sqrt{200^2 - 1} = \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}.$$

Z vyjadrenia pre ε ľahko zistíme, že ε je riešenie kvadratickej rovnice $x^2 - 400x + 1 = 0$, a teda $\varepsilon^2 + 1 = 400\varepsilon$. Potom

$$y^2 = 1 + d_n^2 - 2d_n\varepsilon + \varepsilon^2 = d_n^2 + \varepsilon(400 - 2d_n).$$

Keďže $\varepsilon > 1/400$ a predpokladali sme, že $d_n < 100$, máme $y^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$. To znamená, že sme ukázali, že bez ohľadu na to, akú stratégiu má poľovník, sa môže stať, že $d_{n+200}^2 >$ $> d_n^2 + \frac{1}{2}$. Preto zajac vyhrá.

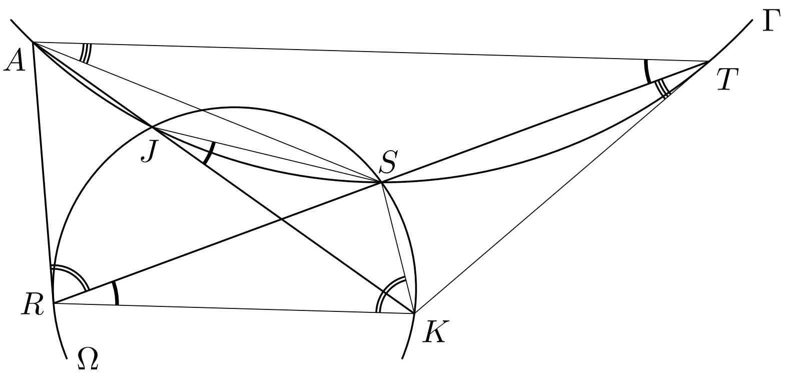
---

4. *Na kružnici Ω sú dané dva rôzne body R a S, pričom RS nie je jej priemerom. Označme l dotyčnicu kružnice Ω v bode R. Nech T je taký bod, že S je stredom úsečky RT. Na kratšom oblúku RS kružnice Ω je zvolený bod J tak, že kružnica Γ opísaná trojuholníku JST pretína priamku l v dvoch rôznych bodoch. Označme A ten priesečník Γ s l, ktorý je bližšie k bodu R. Priamka AJ pretína kružnicu Ω v bode K ($K \neq J$). Dokážte, že priamka KT je dotyčnicou kružnice Γ.* (Luxembursko)

Riešenie. Z obvodových uhlov na kružniciach Ω a Γ máme $|\angle KRS| = |\angle KJS| =$ $= |\angle ATS|$. Na druhej strane RA je dotyčnica k Ω a z úsekového uhla máme rovnosť $|\angle SKR| = |\angle SRA|$. Preto sú trojuholníky ART a SKR podobné podľa vety *uu* (obr. 2) a platí

$$\frac{|RT|}{|RK|} = \frac{|AT|}{|SR|} = \frac{|AT|}{|ST|}.$$

Využili sme, že $|SR| = |ST|$. Z rovnosti, ktorú sme dostali a vzťahu $|\angle SKR| = |\angle SRA|$ vyplýva, že trojuholníky AST a TKR sú podobné podľa vety *sus*. Z tejto podobnosti máme rovnosť $|\angle SAT| = |\angle KTR|$. A z toho vyplýva, že KT je dotyčnica ku Γ v bode T, čo sme chceli dokázať.



Obr. 2

---

5. *Dané je celé číslo $N \geqq 2$. Skupina $N(N+1)$ futbalistov, z ktorých žiadni dvaja nemajú rovnakú výšku, stojí v rade. Tréner Ján chce odstrániť $N(N-1)$ futbalistov z tohto radu tak, aby nový rad pozostávajúci zo zvyšných $2N$ futbalistov spĺňal nasledovných N podmienok:*

1) nikto nestojí medzi dvoma najvyššími futbalistami,

2) nikto nestojí medzi tretím a štvrtým najvyšším futbalistom,

$\vdots$

N) nikto nestojí medzi dvoma najnižšími futbalistami.

Dokážte, že je to vždy možné. (*Rusko*)

Riešenie. Rozdelíme rad do N blokov tak, že v každom bloku je $N+1$ za sebou stojacich ľudí. Ukážeme, že môžeme z každého bloku odstrániť $N-1$ ľudí tak, aby sme splnili podmienky.

Najprv výšky jednotlivých ľudí dáme do tabuľky $(N+1) \times N$ tak, že do prvého stĺpca dáme výšky ľudí z prvého bloku, ale zoradíme ich od najväčšej po najmenšiu. Všeobecne do i-teho stĺpca dáme výšky ľudí z i-teho bloku, zoradené od najväčšej po najmenšiu.

Následne budeme vymieňať stĺpce nasledujúcim spôsobom: Najprv si vyberieme stĺpec, ktorého číslo v druhom riadku je najväčšie. Tento stĺpec dáme úplne naľavo. Potom zo zvyšných stĺpcov vyberieme ten, ktorého tretie číslo je najväčšie, ten bude druhý zľava, atď. Všeobecne ako k-ty stĺpec zľava dáme ten, ktorý má na pozícii $k+1$ zo zvyšných stĺpcov najväčšie číslo.

Dostaneme tak nasledujúcu tabuľku:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{x_{1,1}} & & x_{1,2} & & x_{1,3} & \cdots & x_{1,N-1} & & x_{1,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\boldsymbol{x_{2,1}} & > & \boldsymbol{x_{2,2}} & & x_{2,3} & \cdots & x_{2,N-1} & & x_{2,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{3,1} & & \boldsymbol{x_{3,2}} & > & \boldsymbol{x_{3,3}} & \cdots & x_{3,N-1} & & x_{3,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N,1} & & x_{N,2} & & x_{N,3} & \cdots & \boldsymbol{x_{N,N-1}} & > & \boldsymbol{x_{N,N}} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N+1,1} & & x_{N+1,2} & & x_{N+1,3} & \cdots & x_{N+1,N-1} & & \boldsymbol{x_{N+1,N}}
\end{array}
$$

Teraz vyberieme tých ľudí, ktorých výšky sú v tabuľke znázornené tučne. Vďaka tomu, ako sme usporiadali stĺpce, ich máme zoradených tak, ako naznačujú znamienka. Vidíme, že dvojica s poradiami $2k-1$ a $2k$ je v jednom stĺpci. No v každom stĺpci sú stále ľudia z jedného bloku, a keďže sme z každého stĺpca vybrali len dvoch ľudí, medzi nimi nikto nie je. To znamená, že tento výber vyhovuje podmienkam a máme to, čo sme chceli.

---

6. *Usporiadaná dvojica celých čísel (x, y) sa nazýva primitívny mrežový bod, keď najväčší spoločný deliteľ čísel x a y je 1. Dokážte, že pre ľubovoľnú konečnú množinu S primitívnych mrežových bodov existuje kladné celé číslo n a celé čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ také, že pre všetky (x, y) z S platí*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(*USA*)

Riešenie. Označme $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ jednotlivé body množiny S. Tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 0$ je to triviálne, vyhovuje ľubovoľný polynóm, napr. $P(x, y) = x + y$.

Ďalej predpokladajme, že pre $k-1$ tvrdenie platí. Ukážeme, že platí aj pre k. Najprv ukážeme, že môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $(x_k, y_k) = (1, 0)$. Ak totiž úlohu vyriešime pre tento prípad, tak nasledujúcim spôsobom ju vieme vyriešiť aj v ostatných prípadoch:

Keďže sú x_k a y_k nesúdeliteľné, tak existujú celé čísla c, d také, že $cx_k + dy_k = 1$. Položme $p_i = cx_i + dy_i$ a $q_i = -y_kx_i + x_ky_i$ pre všetky $1 \leqq i \leqq n$. Všimnime si, že platí $(p_k, q_k) = (1, 0)$. Predpokladajme, že $D \mid p_i$, $D \mid q_i$ pre nejaké $1 \leqq i \leqq n$. Keďže platí

$$y_kp_i + aq_i = ay_kx_i + by_ky_i - y_kax_i + ax_ky_i = (by_k + ax_k)y_i = y_i,$$

nutne $D \mid y_i$. Na druhej strane $x_kp_i - bq_i = x_i$, a preto $D \mid x_i$. My však vieme, že x_i a y_i sú nesúdeliteľné, preto nutne $D \mid 1$. Z toho však vyplýva, že aj p_i, q_i sú nesúdeliteľné.

Našu úlohu s bodmi (x_i, y_i) sme tak previedli na úlohu s bodmi (p_i, q_i), kde posledný bod je $(1, 0)$. A ak tento problém vieme vyriešiť, tak máme polynóm $P(p, q)$ taký, že $P(p_i, q_i) = 0$. Teraz je jednoduché každý výskyt p v tom polynóme nahradiť $cx + dy$ a každý výskyt q nahradiť $-y_kx + x_ky$. Dostaneme tak určite homogénny polynóm

$$Q(x, y) = P(cx + dy, -y_kx + x_ky),$$

ktorý má zrejme všetky koeficienty celočíselné a platí $Q(x_i, y_i) = P(p_i, q_i) = 1$, čím je problém vyriešený.

Vráťme sa naspäť k indukcii a predpokladajme, že $(x_k, y_k) = (1, 0)$. Vieme, že z indukčného predpokladu máme polynóm

$$P(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n$$

taký, že $P(x_i, y_i) = 1$ pre všetky $1 \leqq i \leqq k-1$. Označme

$$Q(x, y) = (y_1x - x_1y)(y_2x - x_2y)\ldots(y_{k-1}x - x_{k-1}y).$$

Zjavne $Q(x_i, y_i) = 0$ pre všetky $1 \leqq i \leqq k-1$.

V špeciálnom prípade, keď platí $y_i = 0$ pre nejaké $1 \leqq i \leqq k-1$, máme $|a_0| = 1$. Ľahko overíme, že v tomto špeciálnom prípade polynóm $P(x,y)^2$ vyhovuje. Inak budeme náš polynóm hľadať v tvare

$$R(x,y) = P(x,y)^l - Mx^{nl-k+1}Q(x,y),$$

kde l, M sú celé čísla, $l \geqq 1$. Zjavne $R(x_i, y_i) = 1$ pre všetky $1 \leqq i \leqq k-1$. Potrebujeme len zariadiť, aby $R(1,0) = 1$. Ak však vyjadríme $R(1,0)$, dostávame

$$R(1,0) = a_0^l - My_1y_2\dots y_{k-1}.$$

Vidíme, že potrebujeme nájsť také l, aby $a_0^l \equiv 1 \pmod{y_1y_2\dots y_{k-1}}$. Potom už triviálne zvolíme vhodné M. My vieme, že to platí pre

$$l = \varphi(y_1y_2\dots y_{k-1})$$

za predpokladu, že a_0 a $y_1y_2\dots y_{k-1}$ sú nesúdeliteľné. Avšak keby platilo $D \mid a_0$, $D \mid y_i$ pre nejaké i, tak by platilo aj $D \mid P(x_i, y_i) = 1$. To znamená, že a_0 a y_i sú nesúdeliteľné pre všetky $1 \leqq i \leqq k-1$, a preto je a_0 nesúdeliteľné aj s ich súčinom. To znamená, že naozaj môžeme zvoliť $l = \varphi(y_1y_2\dots y_{k-1})$ a nájdeme hľadaný polynóm R. Tým je dôkaz indukciou ukončený.