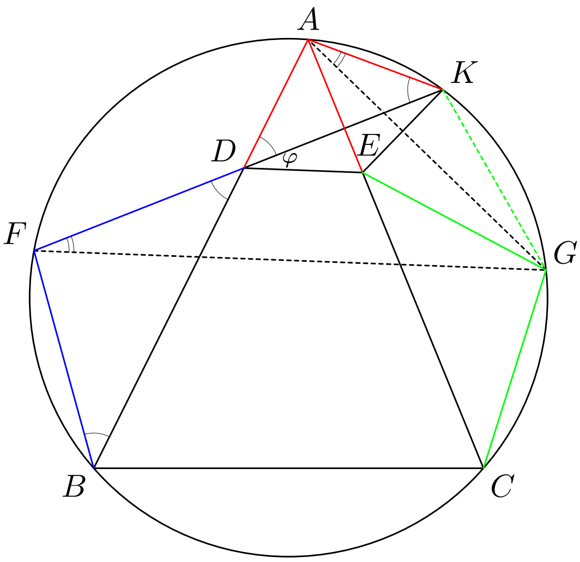
67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh IMO*

---

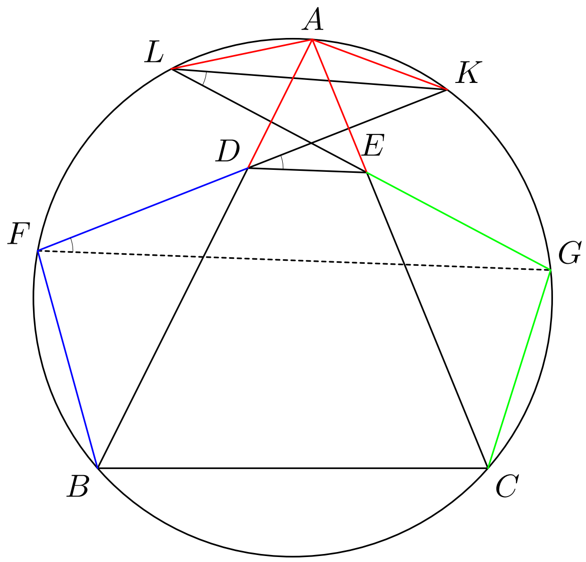
1. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s opísanou kružnicou Γ. Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E, pričom $|AD| = |AE|$. Osi úsečiek BD a CE pretínajú kratšie oblúky AB a AC kružnice Γ postupne v bodoch F a G. Dokážte, že priamky DE a FG sú rovnobežné (alebo totožné).* (Grécko)

Riešenie. Keďže F leží na osi BD, trojuholník BFD je rovnoramenný. Označme K druhý priesečník priamky FD s Γ. Z obvodového uhla nad tetivou AF dostaneme $|\measuredangle AKF| = |\measuredangle ABF|$, a keďže $|\measuredangle ABF| = |\measuredangle BDF|$, trojuholník AKD je rovnoramenný (obr. 1). Z toho máme $|AD| = |AK|$, a keďže tiež $|AD| = |AE|$, A je stred kružnice opísanej trojuholníku DEK.

Označme $|\measuredangle KDE| = \varphi$. Úloha bude dokončená, ak dokážeme, že $|\measuredangle KFG| = \varphi$, čo je ekvivalentné s $|\measuredangle KAG| = \varphi$. Z vety o obvodom a stredovom uhle platí $|\measuredangle EAK| = 2\varphi$, takže stačí dokázať, že AG je os $\measuredangle EAK$, teda os úsečky EK. Keďže G z definície leží na osi úsečky EC, stačí dokázať, že G je stredom kružnice opísanej trojuholníku KEC.



Obr. 1



Obr. 2

Z obvodového uhla nad tetivou CK máme $|\measuredangle KGC| = 180° - 2\varphi$. Ďalej z rovnoramennosti AKE máme $|\measuredangle KEA| = 90° - \varphi$, takže $|\measuredangle KEC| = 90° + \varphi$. Označme G' stred kružnice opísanej trojuholníku KEC. Z vety o obvodom a stredovom uhle platí $|\measuredangle KG'C| = 2 \cdot (180° - |\measuredangle KEC|) = 2 \cdot (180° - (90° + \varphi)) = 180° - 2\varphi$, takže G' leží na Γ na oblúku KC neobsahujúcom B. Keďže G' leží aj na osi EC, nutne $G = G'$, čo stačilo dokázať.

Poznámka. Po definovaní K a dokázaní, že $|AK| = |AD|$ $(= |AE|)$ je možné úlohu dokončiť aj inak. Ak definujeme L ako druhý priesečník GE a Γ (obr. 2), tak analogicky ako K aj L leží na kružnici so stredom A a polomerom $|AD|$. Štvoruholník $KEDL$ je teda tetivový, takže spolu máme

$$|\measuredangle GFK| = |\measuredangle GLK| = |\measuredangle ELK| = |\measuredangle EDK|,$$

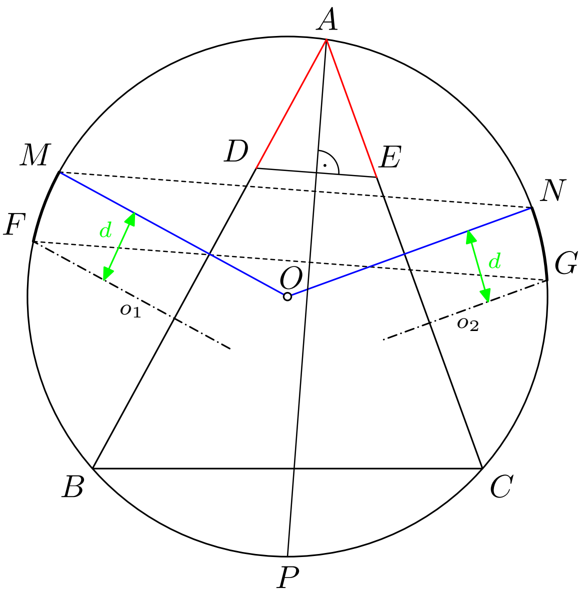
čo je ekvivalentné s dokazovanou rovnobežnosťou.

Iné riešenie. Označme O stred Γ a M, N postupne stredy oblúkov AB a AC neobsahujúcich C a B (obr. 3). Vzdialenosť d medzi OM a osou o_1 úsečky BD je rovná $\frac{1}{2}|AB| - \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AD|$, takže je rovnaká ako vzdialenosť ON a osi o_2 úsečky CE. To znamená, že rovnoramenný lichobežník s vrcholmi na Γ určený priamkami OM a o_1 je zhodný s rovnoramenným lichobežníkom s vrcholmi na Γ určeným priamkami ON a o_2. Z toho máme, že oblúky MF a NG sú rovnako dlhé. Z toho vyplýva $FG \parallel MN$, takže stačí dokázať $MN \parallel DE$.

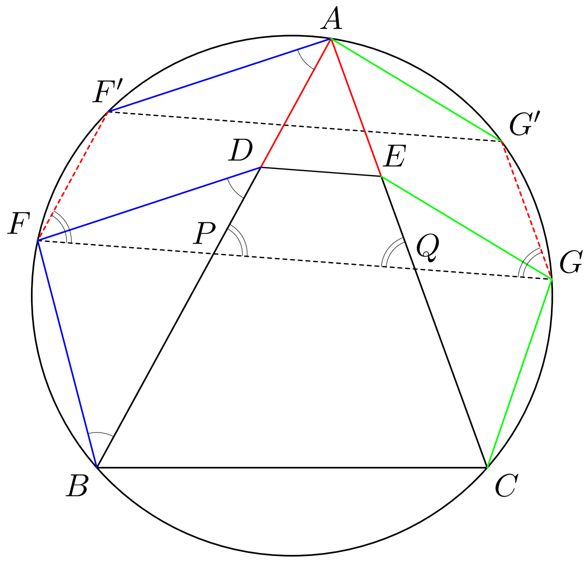
Označme P stred oblúka BC neobsahujúceho A. Potom je AP os uhla $\measuredangle DAE$ a z rovnoramennosti ADE platí $AP \perp DE$. Stačí teda dokázať $AP \perp MN$. Uhol medzi tetivami AP a MN je však rovný[1]

$$(MP) + (NA) = (MB) + (BP) + (NA) = \frac{(AB) + (BC) + (CA)}{2} = 90°,$$

čo bolo treba dokázať.



Obr. 3



Obr. 4

Iné riešenie. Nech P, Q sú postupne priesečníky priamky FG s priamkami AB, AC. Označme F' a G' také body, že $AF'FB$ a $AG'GC$ sú rovnoramenné lichobežníky (obr. 4). Body F' a G' zrejme ležia na Γ. Tiež platí

$$|\measuredangle F'AD| = |\measuredangle ABF| = |\measuredangle DBF| = |\measuredangle FDB|,$$

z čoho vyplýva $AF' \parallel DF$. Štvoruholník $AF'FD$ je teda rovnobežník. Analogicky $AG'GE$ je rovnobežník. Platí teda $|F'F| = |AD| = |AE| = |G'G|$. Štvoruholník $F'FGG'$ je teda rovnoramenný lichobežník, takže $|\measuredangle F'FG| = |\measuredangle G'GF|$. Vďaka rovnobežnostiam $F'F \parallel AP$ a $G'G \parallel AQ$ to znamená $|\measuredangle APQ| = |\measuredangle AQP|$. Trojuholníky APQ, ADE sú teda oba rovnoramenné, z čoho už zrejme vyplýva $PQ \parallel DE$.

[1] (XY) označuje veľkosť obvodového uhla prislúchajúceho oblúku XY zapísaného proti smeru hodinových ručičiek. Používame tvrdenie, že ak máme body X, X', Y, Y' na kružnici v tomto poradí, tak uhol medzi tetivami XY a XX' je rovný $(XX') + (YY')$.

2. *Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré existujú reálne čísla a_1, a_2, ..., a_{n+2} také, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a*

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, n$. (*Patrik Bak, Slovensko*)

Riešenie. Pre pohodlnejšie vyjadrovanie rozšírme postupnosť $a_1, \ldots, a_{n+2}$ na nekonečnú periodickú postupnosť s periódou n (nie nutne najkratšou).

Ak postupnosť obsahuje dva kladné členy a_i, a_{i+1}, tak $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > 1$, takže ďalší člen je taktiež kladný, a navyše väčší ako 1. Z indukcie teda vyplýva, že všetky členy sú kladné a väčšie ako 1. Avšak potom $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 \geqq 1 \cdot a_{i+1} + 1 > a_{i+1}$ pre každý index i, čo je nemožné, keďže naša postupnosť je periodická.

Ak postupnosť obsahuje číslo 0, teda ak $a_i = 0$ pre nejaký index i, tak čísla $a_{i+1} = a_{i-1} a_i + 1$ a $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1$ sú obe rovné 1, takže ide o dva po sebe idúce kladné členy postupnosti, čo sme už vylúčili.

Všimnime si, že po dvoch záporných členoch musí nasledovať kladný člen: ak platí $a_i < 0$ a $a_{i+1} < 0$, tak $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > 1 > 0$. Zhrnutím tohto pozorovania a predošlých úvah máme, že každý kladný člen je nasledovaný jedným alebo dvoma zápornými členmi a následne kladným členom.

Uvážme najprv prípad, kedy žiaden kladný člen nie je nasledovaný dvoma zápornými. V tom prípade sa teda kladné a záporné členy striedajú. Takže, ak $a_i < 0$, tak $a_{i+1} > 0$, $a_{i+2} < 0$, $a_{i+3} > 0$ (a tak ďalej). Všimnime si, že $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} < 0 < a_{i+3} = a_{i+1} a_{i+2} + 1$. Keďže $a_{i+1} > 0$, máme $a_i < a_{i+2}$. Z toho máme, že záporné členy tvoria rastúcu postupnosť $a_i < a_{i+2} < a_{i+4} < \ldots$, čo nie je možné, keďže postupnosť je periodická.

Jediný zostávajúci prípad je, že postupnosť obsahuje dva po sebe idúce záporné členy. Predpokladajme, že a_i a a_{i+1} sú záporné; potom $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > 1 > 0$. Číslo a_{i+3} teda musí byť záporné. Platí $a_{i+4} = a_{i+2} a_{i+3} + 1 < 1 < a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$. S týmto pozorovaním ďalej máme

$$a_{i+5} - a_{i+4} = (a_{i+3} a_{i+4} + 1) - (a_{i+2} a_{i+3} + 1) = a_{i+3}(a_{i+4} - a_{i+2}) > 0,$$

takže $a_{i+5} > a_{i+4}$. Keďže najviac jedno z čísel a_{i+4}, a_{i+5} môže byť kladné, nutne číslo a_{i+4} musí byť záporné.

Dokázali sme, že čísla a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ktoré sú postupne záporné, záporné a kladné, sú nutne nasledované číslami a_{i+3}, a_{i+4}, a_{i+5}, ktoré sú taktiež postupne záporné, záporné a kladné. V ďalších troch členoch sa nutne musí zopakovať tento vzor. Z toho už vidieť, že n je nutne deliteľné 3.

Na druhej strane, pre n deliteľné 3 je $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (-1, -1, 2, -1 - 1, 2, \ldots)$ zrejmým riešením. Platí teda, že všetky vyhovujúce čísla n sú čísla deliteľné tromi.

Iné riešenie. Dokážeme, že najkratšia perióda postupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je rovná 3. Čísla $a_1, a_2 \ldots, a_n$ nemôžu byť všetky navzájom rovné, keďže rovnica $x^2 + 1 = x$ nemá reálne riešenie. Najkratšia perióda teda nemôže byť 1.

Aplikovaním rekurentného vzťahu pre i a $i + 1$ dostávame

$$(a_{i+2} - 1) a_{i+2} = a_i a_{i+1} a_{i+2} = a_i (a_{i+3} - 1), \quad \text{takže}$$
$$a_{i+2}^2 - a_i a_{i+3} = a_{i+2} - a_i.$$

Sčítaním týchto vzťahov pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a násobením dvomi dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+3})^2 = 0.$$

To dokazuje, že $a_i = a_{i+3}$ pre každý index i, takže postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ je naozaj periodická s periódou 3. Keďže najkratšia perióda nemôže byť 1, je nutne 3, z čoho už plynie, že n je nutne deliteľné tromi.

Poznámka. Vyriešením sústavy $ab + 1 = c$, $bc + 1 = a$, $ca + 1 = b$ zistíme, že riešenie $(-1, -1, 2)$ sa opakuje vo všetkých postupnostiach spĺňajúcich zadanie.

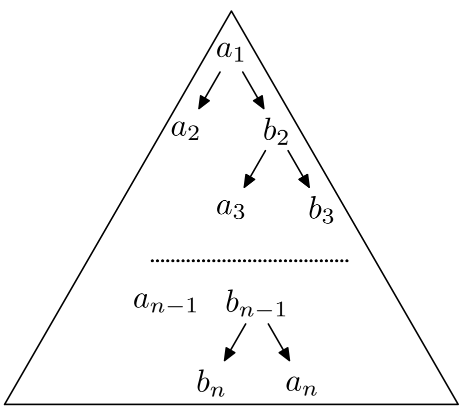
---

3. *Rovnostrannú trojuholníkovú tabuľku čísel nazývame antipascalov trojuholník, keď každé číslo okrem čísel v spodnom riadku je rovné absolútnej hodnote rozdielu dvoch čísel nachádzajúcich sa bezprostredne pod ním. Napríklad nasledujúca tabuľka je antipascalovým trojuholníkom so štyrmi riadkami, ktorý obsahuje každé celé číslo od* 1 *do* 10*:*

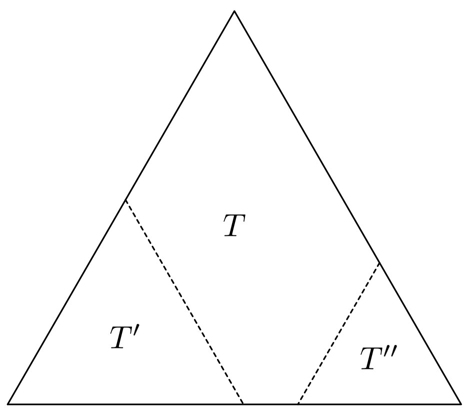
$$\begin{array}{ccccccc} &&&4&&& \\ &&2&&6&& \\ &5&&7&&1& \\ 8&&3&&10&&9 \end{array}$$

Rozhodnite, či existuje antipascalov trojuholník s 2018 riadkami, ktorý obsahuje každé celé číslo od 1 *do* $1 + 2 + \ldots + 2018$*.* (Irán)

Riešenie. Dokážeme, že taký antipascalov trojuholník neexistuje. Nech T je antipascalov trojuholník obsahujúci každé číslo od 1 do $1 + 2 + \ldots + n$ a nech a_1 je najvyššie položené číslo v T (obr. 5). Dve čísla pod a_1 označme a_2 a $b_2 = a_1 + a_2$, dve čísla pod b_2 označme a_3 a $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, a tak ďalej až po posledný riadok, kde máme nejaké a_n a $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ktoré sú susedmi pod číslom $b_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$. Keďže $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je n navzájom rôznych prirodzených čísel ktorých súčet (rovný b_n) neprevyšuje najväčšie číslo v T rovné $1 + 2 + \ldots + n$, nutne ide o nejaké poradie čísel $1, 2, \ldots, n$.



Obr. 5



Obr. 6

Uvážme teraz dva „rovnostranné“ podtrojuholníky T, ktorých spodný riadok obsahuje čísla naľavo, respektíve napravo od dvojice a_n, b_n (obr. 6). (Jeden z nich môže byť prázdny.) Aspoň jeden z nich, napríklad T', má stranu dĺžky $l \geqq \lceil (n-2)/2 \rceil$. Keďže T' má tiež antipascalovskú vlastnosť, obsahuje l navzájom rôznych prirodzených čísel $a'_1, a'_2, \ldots, a'_l$, kde a'_1 je vrchol a čísla a'_k a $b'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k$ sú dvaja susedia pod b'_{k-1} pre každé $k = 2, 3, \ldots, l$. Keďže všetky a_k ležia mimo T' a tvoria poradie $1, 2, \ldots, n$, všetky a'_k sú väčšie ako n. Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} b'_l &\geqq (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+l) = \frac{l(2n+l+1)}{2} \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \left(2n + \frac{n-2}{2} + 1 \right) = \frac{5n(n-2)}{8}, \end{aligned}$$

čo je viac ako $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ pre $n = 2018$. Požadovaný antipascalov trojuholník teda naozaj neexistuje.

Poznámka. Horný odhad sa dá vylepšiť vďaka pozorovaniu, že $b'_l \neq b_n$. To znamená $n(n+1)/2 = b_n > b'_l \geqq \lceil (n-2)/2 \rceil (2n + \lceil (n-2)/2 \rceil + 1)/2$, z čoho sa dá odvodiť $n \leqq 7$ pre nepárne n a $n \leqq 12$ pre párne n. Zdá sa, že najväčší antipascalov trojuholník, ktorého prvky sú v nejakom poradí prirodzené čísla od 1 do $1+2+\ldots+n$, má 5 riadkov.

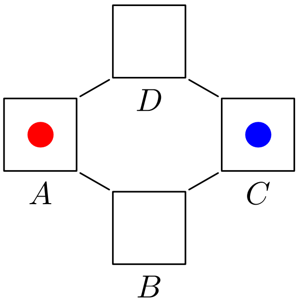
---

4. *Nazývajme pozíciou každý bod roviny so súradnicami (x, y) takými, že x aj y sú kladné celé čísla menšie alebo rovné 20. Na začiatku je každá zo 400 pozícií voľná. Anna a Boris sa striedajú v ukladaní kameňov, pričom začína Anna. Anna vo svojom ťahu položí nový červený kameň na voľnú pozíciu vždy tak, aby vzdialenosť medzi každými dvoma pozíciami obsadenými červenými kameňmi bola rôzna od $\sqrt{5}$. Boris vo svojom ťahu položí nový modrý kameň na ľubovoľnú voľnú pozíciu. (Pozícia obsadená modrým kameňom môže mať ľubovoľné vzdialenosti od ostatných obsadených pozícií.) Skončia vtedy, keď niektorý z nich už nemôže položiť ďalší kameň. Nájdite najväčšie K také, že Anna dokáže položiť aspoň K červených kameňov bez ohľadu na to, ako ukladá kamene Boris.* (*Arménsko*)

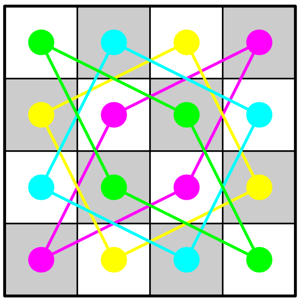
Riešenie. Dokážeme, že hľadané K je rovné 100. Políčka (x, y) a (x', y') majú vzdialenosť $\sqrt{5}$ práve vtedy, keď sú čísla $|x - x'|$ a $|y - y'|$ rovné 1 a 2 v nejakom poradí. Inak povedané, keď platí, že medzi týmito políčkami existuje ťah šachového koňa.

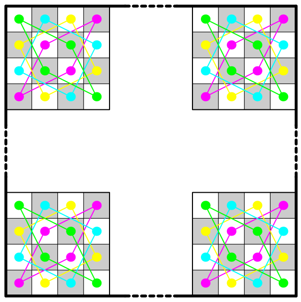
Uvažujme ofarbenie všetkých políčok šachovnicovým spôsobom tak, že ľavý horný roh je čierny. Platí, že všetky dvojice políčok vzdialených ťahom jazdca majú rôznu farbu. Z toho vyplýva, že Anna môže ukladať svoje kamene na políčka tej istej farby, a nikdy sa nestane, že urobí zakázaný ťah. Takýchto políčok je $(20 \cdot 20)/2 = 200$ (z každej farby), a keďže sa s Borisom striedajú v ťahoch, tak jej môže modrými kameňmi obsadiť najviac 100 z týchto políčok, takže v každom prípade vie Anna položiť aspoň

100 červených kameňov.



Obr. 7


Obr. 8


Obr. 9

V ďalšom kroku dokážeme, že Boris vie zabezpečiť, že Anna obsadí prinajlepšom 100 políčok svojimi kameňmi. Jeho stratégia spočíva v tom, že si všetky políčka šachovnice rozdelí do štvoríc políčok A, B, C, D takých, že existujú ťahy jazdcom v cykle A–B–C–D–A. Akonáhle Anna položí svoj kameň na nejaké políčko, napríklad A (obr. 7), Borisovi stačí položiť kameň na zodpovedajúce „protiľahlé“ políčko, v našom príklade C. Tým zabezpečí, že z každej takejto štvorice bude Anninými kameňmi obsadené najviac jedno políčko. Z toho už bude vyplývať, že Anna celkovo položí najviac 100 svojich kameňov.

Požadované rozdelenie na štvorice pritom naozaj existuje. Najprv rozdelíme štvorec 4×4 na tieto štvorice (obr. 8). Uvažovaný štvorec 20×20 následne rozdelíme na $5 \cdot 5$ štvorcov s rozmermi 4×4, v ktorých zopakujeme tento vzor (obr. 9). Tým je teda úloha dokončená a výsledok je $K = 100$.

---

5. *Nech $a_1, a_2, \dots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Predpokladajme, že existuje celé číslo $N > 1$ také, že pre každé $n \geqq N$ je číslo*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

celé. Dokážte, že existuje kladné celé číslo M také, že $a_m = a_{m+1}$ pre všetky $m \geqq M$.

(*Mongolsko*)

Riešenie. (Podľa *Michala Staníka*.) Vezmime ľubovoľné prirodzené číslo $i \geqq N$. Uvažovaný výraz je celé číslo pre i, ale aj pre $i + 1 > N$. Rozdiel týchto výrazov je rovný

$$D_i = \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{i-1}}{a_i} + \frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_1}\right) - \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{i-1}}{a_i} + \frac{a_i}{a_1}\right) =$$
$$= \frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_1} - \frac{a_i}{a_1} = \frac{a_1(a_i - a_{i+1}) + a_{i+1}^2}{a_1 a_{i+1}}.$$

Rozdiely D_i sú všetky celočíselné. Dokážeme, že táto podmienka stačí na to, aby bola postupnosť a_i od istého člena konštantná.

Keďže D_i je celé číslo, nutne platí $a_1 \mid a_{i+1}^2$. Z toho máme, že každé prvočíslo p deliace a_1 delí aj a_{i+1}^2, takže aj a_{i+1}. Keďže to platí pre ľubovoľné $i \geqq N$, všetky čísla $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ sú deliteľné p. Vydeľme teda všetky čísla $a_1, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ číslom p. Týmto krokom sa zrejme nezmenia hodnoty rozdielov $D_{N+1}, D_{N+2}, \dots$. Taktiež sa nezmení ani dokazované tvrdenie hovoriace, že postupnosť je od istého člena konštantná.

V ďalšom kroku vezmeme ďalšie prvočíslo p' deliace a_1 (nemusí byť nutne rôzne od p), a znova odvodíme $p' \mid a_{i+1}$, tentoraz pre $i \geqq N+1$. V tomto kroku číslom p delíme teda čísla $a_1, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots$ a zachováme hodnoty rozdielov $D_{N+2}, D_{N+3}, \dots$

Tento postup opakujeme, až kým sa nedostaneme k $a_1 = 1$ a nejakému indexu N_0 takému, že pre všetky $i \geqq N_0$ hodnota D_i ostala zachovaná (a teda je celočíselná). Presnejšie, ak na začiatku bolo $a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, tak $N_0 = N + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Predpokladajme teda, že $a_1 = 1$, a pre $i \geqq N_0$ sú čísla D_i celočíselné. Vidíme, že to znamená, že $a_{i+1} \mid a_i$, z čoho vyplýva $a_{i+1} \leqq a_i$. Čísla $a_{N_0}, a_{N_0+1}, a_{N_0+2}, \dots$ teda tvoria nerastúcu postupnosť prirodzených čísel. Táto postupnosť teda musí byť od určitého člena konštantná, takže tvrdenie je dokázané.

---

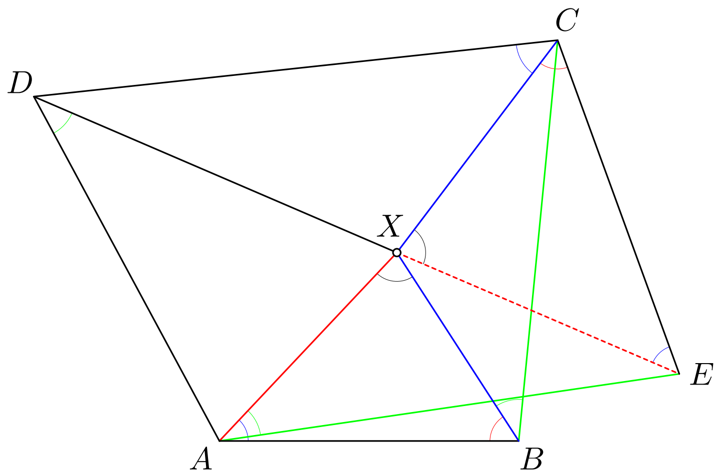
6. *Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, pričom $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Vnútri neho leží bod X taký, že*

$$|\measuredangle XAB| = |\measuredangle XCD| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle XBC| = |\measuredangle XDA|.$$

Dokážte, že $|\measuredangle BXA| + |\measuredangle DXC| = 180°$. (*Poľsko*)

Riešenie. Nech E je taký bod, že trojuholníky XAB a XEC sú priamo podobné. Podľa známeho tvrdenia sú potom aj trojuholníky XAE a XBC podobné. Keďže $|\measuredangle AXB| = |\measuredangle EXC|$, dokazované tvrdenie je ekvivalentné s tým, že body E, X, D sú kolineárne (obr. 10).

Platí $|\measuredangle XCE| + |\measuredangle XCD| = |\measuredangle XBA| + |\measuredangle XAB| < 180°$ a $|\measuredangle XAE| + |\measuredangle XAD| = |\measuredangle XBC| + |\measuredangle XAD| = |\measuredangle XDA| + |\measuredangle XAD| < 180°$, čo dokazuje, že X leží vnútri uhlov ECD a EAD štvoruholníka $EADC$.



Obr. 10

Z podobností $\triangle XAE \sim \triangle XBC$ a $\triangle XAB \sim \triangle XEC$ máme $|XA| \cdot |BC| = |XB| \cdot |AE|$ a $|XB| \cdot |CE| = |XC| \cdot |AB|$. Násobenie týchto rovníc spolu s predpokladom zo zadania $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$ dáva $|XA| \cdot |CE| \cdot |CD| = |AE| \cdot |XC| \cdot |AD|$, alebo ekvivalentne

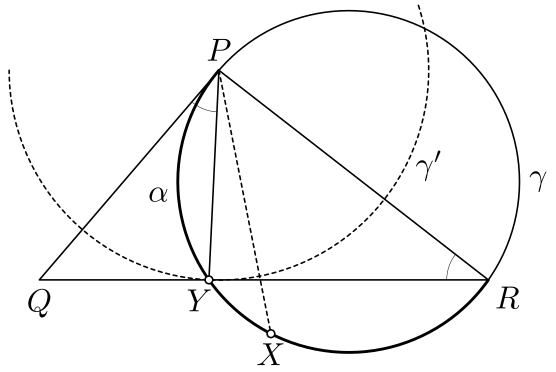
$$\frac{|XA| \cdot |DE|}{|AD| \cdot |AE|} = \frac{|XC| \cdot |DE|}{|CD| \cdot |CE|}. \tag{1}$$

Tvrdenie dokončíme na základe nasledujúceho pomocného tvrdenia: *Nech PQR je trojuholník a X je bod ležiaci v jeho vnútornom uhle QPR taký, že $|\measuredangle QPX| = |\measuredangle PRX|$. Potom*

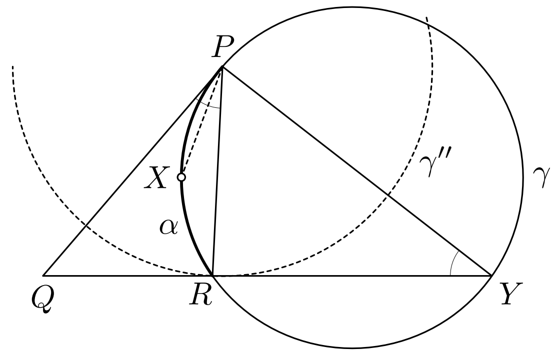
$$\frac{|PX| \cdot |QR|}{|PQ| \cdot |PR|} < 1$$

práve vtedy, keď X leží vnútri trojuholníka PQR.

Predtým, ako toto tvrdenie dokážeme, si všimnime, že s týmto tvrdením sme už hotoví. Ak by totiž X neležal na ED, tak keďže leží vnútri štvoruholníka $EADC$, nutne leží zvonka jedného z trojuholníkov EDA, EDC a vnútri toho druhého, takže podľa pomocného tvrdenia nemôže platiť rovnosť (1).



Obr. 11



Obr. 12

Teraz dokážeme pomocné tvrdenie: Množina bodov X ležiacich vnútri uhla QPR takých, že $|\measuredangle QPX| = |\measuredangle PRX|$, je oblúk α kružnice γ prechádzajúcej R a dotýkajúcej sa PQ v P. Nech γ pretína priamku QR znova v Y (ak sa γ dotýka QR, tak položme $Y = R$). Podobnosť $\triangle QPY \sim \triangle QRP$ dáva

$$|PY| = \frac{|PQ| \cdot |PR|}{|QR|}.$$

Zostáva teda dokázať, že $|PX| < |PY|$ práve vtedy, keď X leží vnútri trojuholníka PQR. Rozoberme 2 prípady:

Ak Y leží vnútri úsečky QR (obr. 11), tak zrejme $|\measuredangle RYP| > |\measuredangle QPY| = |\measuredangle PRY|$, takže $|PR| > |PY|$. Kružnica γ' so stredom P a polomerom $|PY|$ teda neobsahuje bod R. Všetky vnútorné body X podoblúka PY oblúka α ležia vnútri PQR a zároveň vnútri γ', takže pre ne platí $|PX| < |PY|$. Zvyšné body α ležia mimo PQR a zároveň mimo γ', takže pre ne platí opačná nerovnosť $|PX| > |PY|$.

Ak Y leží na polpriamke opačnej k RQ (obr. 12), tak zrejme $|\measuredangle PRY| > |\measuredangle QPR| = |\measuredangle PYR|$, takže $|PY| > |PR|$. Kružnica γ'' so stredom P a polomerom $|PR|$ teda neobsahuje bod Y. Celý oblúk α leží vnútri PQR a zároveň vnútri γ'', takže pre všetky jeho body X platí $|PX| < |PR| < |PY|$.