2017/2018
67. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 23. – 29. 4. 2018.*)

1. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí, že posledná cifra každého deliteľa čísla $\underbrace{111\ldots1}_{5^n}$ je 1.

2. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, pre ktoré $xyz \geqq 1$. Dokážte, že platí

$$\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y} \leqq 1.$$

3. Daný je trojuholník ABC. Kružnica prechádzajúca cez body A, B pretína strany AC a BC postupne v bodoch D, E. Priamky AB a DE sa pretínajú v bode F a priamky BD a CF v bode M. Dokážte, že $|MF| = |MC|$ práve vtedy, keď $|MB|\cdot|MD| = |MC|^2$.

4. Alena a Boris hrajú hru v tabuľke s rozmermi 6×6. Každý hráč vo svojom ťahu zvolí racionálne číslo, ktoré sa ešte v tabuľke nenachádza a napíše ho do niektorého prázdneho políčka. Alena začína a potom sa obaja v ťahoch striedajú. Keď je celá tabuľka vyplnená, zafarbia v každom riadku políčko s najväčším číslom načierno. Alena vyhrá, ak je možné nakresliť lomenú čiaru spájajúcu vrchnú a spodnú stranu tabuľky, ktorá celá leží v čiernych políčkach, inak vyhrá Boris. (Na prechod medzi čiernymi políčkami stačí, aby mali spoločný vrchol.) Ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu?

5. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n s nasledujúcou vlastnosťou: Existuje n po dvoch rôznych prirodzených čísel $a_1, \ldots, a_n$ takých, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1\leqq i<j\leqq n} \operatorname{nsd}(a_i, a_j).$$

6. Nech $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je nekonštantná funkcia. Dokážte, že existujú nenulové reálne x, y také, že $x + y \neq 0$ a $f(x + y) < f(xy)$.

7. Nech V je konečná neprázdna množina bodov v rovine, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Každému bodu z V je priradené nezáporné reálne číslo a súčet všetkých týchto čísel je 1. Medzi niektorými bodmi nakreslíme úsečku tak, aby sa žiadne dve úsečky nepretínali. Potom každej úsečke priradíme číslo, ktoré je súčinom čísel priradených jej koncom. Dokážte, že súčet čísel priradených všetkým úsečkám je najviac $\frac{3}{8}$.

Poznámka. Úsečky sa pretínajú, ak majú spoločný vnútorný bod.

8. Štvorsten $ABCD$, ktorého každá stena je ostrouhlý trojuholník, je vpísaný do sféry so stredom v bode O. Priamka prechádzajúca bodom O kolmá na rovinu ABC pretína túto sféru v bode D', ktorý leží na opačnej strane roviny ABC ako bod D. Priamka DD' pretína rovinu ABC v bode P, ktorý leží vnútri trojuholníka ABC. Dokážte, že ak $|\measuredangle APB| = 2|\measuredangle ACB|$, tak $|\measuredangle ADD'| = |\measuredangle BDD'|$.

9. Nech n je dané kladné celé číslo. Slovo s dĺžkou $3n$, ktoré obsahuje každé z písmen A, B a C práve n-krát, nazývame *chameleónom*. V jednom kroku môžeme navzájom vymeniť ľubovoľné dve susedné písmená. Dokážte, že pre každého chameleóna X existuje taký chameleón Y, že X nemožno zmeniť na Y pomocou menej ako $3n^2/2$ krokov.

10. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, ktorého žiadne dve strany nemajú rovnakú dĺžku. Označme O stred jeho opísanej kružnice a H priesečník výšok. Priamka OA pretína výšky spustené z vrcholov B a C postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku PQH leží na niektorej ťažnici trojuholníka ABC.

11. Postupnosť reálnych čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňa

$$a_n = -\max_{1 \leqq i < n} (a_i + a_{n-i}) \qquad \text{pre všetky } n > 2018.$$

Dokážte, že táto postupnosť je zdola aj zhora ohraničená.

12. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo a existuje kladné celé číslo $b > a$, pre ktoré platí, že $1 + 2^a + 3^a$ delí $1 + 2^b + 3^b$.

13. Nech n je nepárne kladné celé číslo a $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n$ sú nezáporné reálne čísla, pre ktoré platí $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. Dokážte, že môžeme vybrať vlastnú podmnožinu S množiny $\{1, 2, \dots n\}$ takú, že

$$\frac{n-1}{n+1} \sum_{s \in S} x_s \leqq \sum_{s \in S} y_s \leqq \frac{n+1}{n-1} \sum_{s \in S} x_s.$$

14. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x^2 + yf(y) + yf(x)) = f(x)^2 + y^2 + xf(y).$$

15. Daný je trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech P je taký bod na strane AB, pre ktorý platí $|\measuredangle BOP| = |\measuredangle ABC|$ a nech Q je taký bod na strane AC, pre ktorý platí $|\measuredangle COQ| = |\measuredangle ACB|$. Dokážte, že ak uhly BPQ a CQP sú tupé, tak obraz priamky BC podľa priamky PQ tvorí dotyčnicu ku kružnici opísanej trojuholníku APQ.

16. Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník taký, že $|AB| = |BC| = |CD|$, $|\measuredangle EAB| = |\measuredangle BCD|$ a $|\measuredangle EDC| = |\measuredangle CBA|$. Dokážte, že kolmica z bodu E na BC a úsečky AC a BD sa pretínajú v jednom bode.

17. Nech $p \geqq 2$ je prvočíslo. Patrik a Samo hrajú spolu hru, v ktorej sa striedajú v ťahoch. V každom ťahu aktuálny hráč vyberie index i z množiny $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$, ktorý nebol predtým zvolený žiadnym z hráčov, a potom zvolí číslo a_i z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Patrik má prvý ťah. Hra sa končí, keď všetky indexy $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ boli zvolené. Následne je spočítané číslo

$$M = a_0 + 10 \cdot a_1 + \cdots + 10^{p-1} \cdot a_{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} a_j \cdot 10^j.$$

Patrikovou úlohou je zabezpečiť, aby číslo M bolo deliteľné prvočíslom p. Samovou úlohou je tomu zabrániť. Rozhodnite, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.

18. Obdĺžnik $\mathcal{R}$ s nepárnymi celočíselnými dĺžkami strán je rozdelený na menšie obdĺžniky s celočíselnými dĺžkami strán. Dokážte, že sa medzi týmito obdĺžnikmi dá nájsť taký, že vzdialenosti jeho strán od štyroch strán $\mathcal{R}$ sú všetky párne alebo všetky nepárne.