2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *Súčin kladných reálnych čísel a, b, c je 60 a ich súčet je 15. Dokážte nerovnosť*

$$(a+b)(a+c) \geqq 60$$

a zistite, pre ktoré také čísla a, b, c nastane rovnosť. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Pomocou rovností $abc = 60$, $a+b+c = 15$ daný výraz $(a+b)(a+c)$ upravíme a potom odhadneme na základe AG-nerovnosti pre dvojicu hodnôt a a $4/a$:

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc = a^2 + (15-a)\cdot a + \frac{60}{a} =$$
$$= 15a + \frac{60}{a} = 15\Big(a + \frac{4}{a}\Big) \geqq 15 \cdot 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 60.$$

Nerovnosť je dokázaná. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = 4/a$, čiže $a = 2$. Zo vzťahov $b + c = 15 - a = 13$ a $bc = 60/a = 30$ máme $\{b, c\} = \{3, 10\}$. Rovnosť preto spĺňajú práve dve vyhovujúce trojice (a, b, c), a to $(2, 3, 10)$ a $(2, 10, 3)$.

Iné riešenie. Okrem rovností $abc = 60$, $a + b + c = 15$ využijeme AG-nerovnosť pre dvojicu hodnôt bc a $a(a + b + c)$:

$$(a+b)(a+c) = bc + a(a+b+c) \geqq 2 \cdot \sqrt{bc \cdot a(a+b+c)} = 2\sqrt{60 \cdot 15} = 60.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $bc = a(a + b + c)$, čiže $60/a = 15a$, odkiaľ $a = 2$, takže záver je rovnaký ako v prvom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz nerovnosti dajte 4b. Za zistenie, kedy platí rovnosť, udeľte zvyšné 2b.

---

2. *Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré číslo b je deliteľné číslom a a súčasne číslo $3a + 4$ je deliteľné číslom $b + 1$.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Keďže číslo a delí číslo b, môžeme písať $b = ka$, pričom k je kladné celé číslo. Stačí teda nájsť kladné celé čísla a, pre ktoré existuje kladné celé číslo k také, že číslo $3a+4$ je (kladným) násobkom čísla $ka+1$ $(= b+1)$. Z tejto podmienky dostávame nerovnosť $ka + 1 \leqq 3a + 4$, z ktorej vyplýva $k - 3 \leqq (k - 3)a \leqq 3$, a teda $k \leqq 6$. Navyše pre $k \geqq 3$ je už $2(ka + 1) > 3a + 4$ pre ľubovoľné $a \geqq 1$, takže môže byť jedine $ka + 1 = 3a + 4$. Preberieme všetkých šesť možností pre číslo k:

$k = 1$: $a+1 \mid 3a+4$, a keďže $a+1 \mid 3a+3$, muselo by platiť $a+1 \mid 1$, čo nie je možné, lebo $a + 1 > 1$.

$k = 2$: $2a + 1 \mid 3a + 4 = (2a + 1) + (a + 3)$, teda $2a + 1 \mid a + 3$. Keďže však pre ľubovoľné prirodzené a platí $2 \cdot (2a + 1) > a + 3$, musí byť $2a + 1 = a + 3$, čiže $a = 2$ a odtiaľ $b = ka = 4$.

$k = 3$: $3a + 1 = 3a + 4$, čo nie je možné.

$k = 4$: $4a + 1 = 3a + 4$, teda $a = 3$, $b = 12$.

$k = 5$: $5a + 1 = 3a + 4$, čo nesplňa žiadne celé a.

$k = 6$: $6a + 1 = 3a + 4$, teda $a = 1$, $b = 6$.

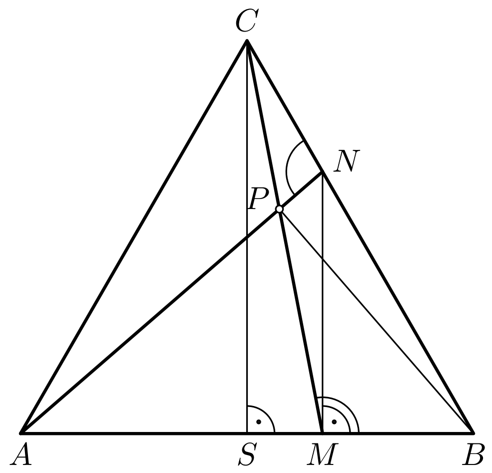
Riešením sú dvojice $(1, 6)$, $(2, 4)$ a $(3, 12)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Len za uvedenie všetkých dvojíc vyhovujúcich zadaniu dajte 1b.

3. *Nech M, N sú postupne vnútorné body strán AB, BC rovnostranného trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P priesečník priamok AN a CM. Dokážte, že priamky BP a AN sú navzájom kolmé.*

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že $|BM| = |CN|$, $|AC| = |BC|$ a $|\measuredangle ACN| = |\measuredangle CBM| = 60°$, takže trojuholníky ACN a CBM sú zhodné podľa vety *sus*. Preto platí aj $|\measuredangle ANC| = |\measuredangle CMB|$, takže štvoruholník $BNPM$ je tetivový (uhol ANC je doplnok do priameho uhla k uhlu ANB, ktorý je protiľahlým uhlom k uhlu CMB v spomenutom štvoruholníku, obr. 1).



Obr. 1

Označme S stred strany AB daného rovnostranného trojuholníka ABC. Keďže $|SB| = \frac{1}{2}|AB|$, je $|SB| : |MB| = 3 : 2$, a keďže aj $|CB| : |NB| = 3 : 2$, sú trojuholníky SBC a MBN podobné podľa vety *sus*. Uhol CSB je pravý, preto musí byť pravý aj uhol NMB. Kružnica opísaná štvoruholníku $BNPM$ je tak Tálesovou kružnicou nad priemerom BN, a teda je pravý aj uhol BPN, čo sme chceli dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odvodenie faktu, že uhol BMN je pravý (podobnosť trojuholníkov SBC a MBN) alebo za dôkaz toho, že štvoruholník $BNPM$ je tetivový, dajte 2b. Za neúplné riešenie (napr. odvodenie oboch predchádzajúcich tvrdení bez dokončenia dôkazu) však nedávajte viac ako 3b.

4. *Zapíšeme všetky päťciferné čísla, v ktorých sa každá z cifier* 4, 5, 6, 7, 8 *vyskytuje práve raz. Potom jedno (ľubovoľné z nich) škrtneme a všetky zvyšné sčítame. Aké sú možné hodnoty ciferného súčtu takého výsledku?* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Výsledný ciferný súčet je určený jednoznačne a je ním číslo 33.

Pre vyriešenie úlohy bude výhodné najskôr zistiť súčet S všetkých päťciferných čísel obsahujúcich každú z cifier 4, 5, 6, 7, 8. Týchto čísel je zrejme práve toľko, koľko je rôznych poradí uvedených piatich cifier, teda $5! = 120$. Navyše každá z daných cifier sa medzi týmito 120 číslami objavuje rovnomerne v každom ráde, teda 24-krát. Súčet S

tak môžeme rozpísať po jednotlivých rádoch ako

$$
\begin{aligned}
S = 10^4 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \\
+ 10^3 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \cdots = \\
= 24 \cdot (4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 24 \cdot 30 \cdot 11\,111.
\end{aligned}
$$

Obráťme teraz pozornosť na možné hodnoty ciferného súčtu čísla $S - a$, pričom a je päťciferné číslo spomínaného tvaru, teda $a = 33\,333 + b$, pričom b je päťciferné číslo obsahujúce každú z cifier 1, 2, 3, 4, 5. Teda

$$S - a = 11\,111 \cdot 24 \cdot 30 - a = 7\,999\,920 - 33\,333 - b = 7\,966\,587 - b.$$

Pri odčítaní čísla b však nenastáva v jednotlivých rádoch prechod cez desiatku, preto je ciferný súčet čísla $S-a$ rovný $(7+9+6+6+5+8+7)-(1+2+3+4+5) = 48-15 = 33$ pre ľubovoľné päťciferné číslo a obsahujúce každú z cifier 4, 5, 6, 7, 8.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.