2020/2021
70. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 2. – 5. 7. 2021.*)

1. Nájdite všetky štvorice kladných celých čísel (a, b, c, d) spĺňajúcich $\mathrm{NSD}(a, b, c, d) = 1$ a súčasne

$$a \mid b + c, \quad b \mid c + d, \quad c \mid d + a, \quad d \mid a + b.$$

(*Vítězslav Kala, Česká rep.*)

2. Vpísaná kružnica ω ostrouhlému trojuholníku ABC sa dotýka strany BC v bode D. Označme I_a stred kružnice pripísanej trojuholníku ABC oproti vrcholu A a M stred úsečky DI_a. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BMC sa dotýka kružnice ω.
(*Patrik Bak, Slovensko*)

3. Pre ľubovoľné dva konvexné mnohouholníky P_1 a P_2 s navzájom rôznymi vrcholmi označme $f(P_1, P_2)$ celkový počet vrcholov, ktoré ležia na strane druhého mnohouholníka. Pre každé kladné celé číslo $n \geqq 4$ určte

$$\max\{f(P_1, P_2) \mid P_1 \text{ a } P_2 \text{ sú konvexné } n\text{-uholníky}\}.$$

(O mnohouholníku povieme, že je *konvexný*, ak veľkosť každého jeho vnútorného uhla je ostro menšia ako 180°.) (*Josef Tkadlec, Česká rep.*)

4. Určte počet usporiadaných 2021-tíc kladných celých čísel, ktoré obsahujú číslo 3 a každé dve susedné čísla sa líšia najviac o 1. (*Walther Janous, Rakúsko*)

5. Postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ spĺňa $a_1 = 1$ a pre všetky $n \geqq 2$, platí

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 3 & \text{ak } n - 1 \in \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}; \\ a_{n-1} + 2 & \text{inak.} \end{cases}$$

Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$a_n < n \cdot (1 + \sqrt{2}).$$

(*Dominik Burek, Poľsko*)

6. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník a predpokladajme, že body A, A_b, B_a, B, B_c, C_b, C, C_a, a A_c ležia v tomto poradí na jeho obvode. Nech $A_1 \neq A$ je druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom AA_bC_a a AA_cB_a. Analogicky, $B_1 \neq B$ je druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom BB_cA_b a BB_aC_b, a $C_1 \neq C$ je druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom CC_aB_c a CC_bA_c. Predpokladajme, že body A_1, B_1 a C_1 sú všetky rôzne, ležia vnútri trojuholníka ABC a neležia na jednej priamke. Dokážte, že priamky AA_1, BB_1, CC_1 a kružnica opísaná trojuholníku $A_1B_1C_1$ sa všetky pretínajú v jednom bode. (*Josef Tkadlec, Česká rep., Patrik Bak, Slovensko*)