2020/2021
70. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh EGMO*

(*Súťaž sa konala 9. – 15. 4. 2021.*)

1. Číslo 2021 je *bombastické*. Platí, že ak pre nejaké kladné celé číslo m je ľubovoľný prvok množiny $\{m, 2m+1, 3m\}$ bombastický, tak potom sú všetky tieto prvky bombastické. Rozhodnite, či číslo 2021^{2021} je bombastické. (*Austrália*)

2. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ také, že rovnica

$$f(xf(x)+y) = f(y) + x^2$$

je splnená pre všetky racionálne čísla x a y. (*Patrik Bak, Slovensko*)

3. Nech ABC je tupouhlý trojuholník s tupým uhlom pri vrchole A. Os vonkajšieho uhla pri vrchole A pretína výšky trojuholníka ABC vo vrcholoch B a C postupne v bodoch E a F. Nech M a N sú body ležiace postupne na úsečkách EC a FB také, že $|\measuredangle EMA| = |\measuredangle BCA|$ a $|\measuredangle ANF| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že body E, F, N, M ležia na jednej kružnici. (*Ukrajina*)

4. Máme daný trojuholník ABC so stredom kružnice vpísanej I. Nech D je bod ležiaci na jeho strane BC. Priamka prechádzajúca bodom D kolmá na priamku BI pretína priamku CI v bode E. Analogicky, priamka prechádzajúca bodom D kolmá na priamku CI pretína priamku BI v bode F. Dokážte, že obraz bodu A v osovej súmernosti podľa priamky EF leží na priamke BC. (*Austrália*)

5. Je daná rovina so špeciálnym bodom O, ktorý nazveme *počiatok*. Nech P je množina 2021 bodov v tejto rovine takých, že
(i) žiadne tri body z P neležia na priamke;
(ii) žiadna dva body z P neležia na priamke prechádzajúcej počiatkom.
Trojuholník s vrcholmi z P nazveme *tučný* ak O leží vnútri neho. Nájdite maximálny počet tučných trojuholníkov. (*Rakúsko*)

6. Rozhodnite, či existuje také nezáporné celé číslo a, že rovnica

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

má viac ako milión rôznych riešení (m, n), kde m a n sú kladné celé čísla. (*Rakúsko*)