2019/2020
69. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh EGMO*

(*Súťaž sa konala 15. – 21. 4. 2020.*)

1. Kladné celé čísla a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} spĺňajú

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Dokážte, že aspoň jedno z čísel a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} je deliteľné 2^{2020}. (*Austrália*)

2. Nájdite všetky postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nezáporných reálnych čísel spĺňajúce nasledovné tri podmienky:
(i) $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2020}$;
(ii) $x_{2020} \leqq x_1 + 1$;
(iii) existuje permutácia $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ taká, že

$$\sum_{i=1}^{2020} \bigl((x_i + 1)(y_i + 1)\bigr)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutácia postupnosti je postupnosť rovnakej dĺžky s rovnakými členmi, avšak členy môžu byť v ľubovoľnom poradí. Napríklad, $(2, 1, 2)$ je permutáciou $(1, 2, 2)$, a tiež obe sú permutáciou $(2, 2, 1)$. Každá postupnosť je permutáciou samej seba.
(*Patrik Bak, Slovensko*)

3. Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník taký, že $|\measuredangle A| = |\measuredangle C| = |\measuredangle E|$ a $|\measuredangle B| = |\measuredangle D| = |\measuredangle F|$ a osi (vnútorných) uhlov $\measuredangle A$, $\measuredangle C$ a $\measuredangle E$ sa pretínajú v jednom bode. Dokážte, že osi (vnútorných) uhlov $\measuredangle B$, $\measuredangle D$ a $\measuredangle F$ sa taktiež pretínajú v jednom bode.

Poznámka. Platí $\measuredangle A = \measuredangle FAB$. Zvyšné vnútorné uhly šesťuholníka sú popísané analogicky. (*Ukrajina*)

4. Permutácia celých čísel 1, 2, …, m sa nazýva *svieža*, ak neexistuje žiadne kladné celé číslo $k < m$ také, že prvých k čísel v permutácii sú čísla 1, 2, …, k v nejakom poradí. Nech f_m je počet sviežich permutácií čísel 1, 2, …, m. Dokážte, že pre všetky $n \geqq 3$ platí nerovnosť $f_n \geqq n \cdot f_{n-1}$.

Poznámka. Napríklad, ak $m = 4$, tak permutácia $(3, 1, 4, 2)$ je svieža, naproti tomu permutácia $(2, 3, 1, 4)$ nie je. (*Patrik Bak, Slovensko*)

5. Nech ABC je trojuholník taký, že $|\measuredangle BCA| > 90°$. Kružnica Γ jemu opísaná má polomer R. Vnútri úsečky AB leží bod P taký, že $|PB| = |PC|$ a dĺžka úsečky PA je rovná R. Os úsečky PB pretína Γ v bodoch D a E. Dokážte, že P je stredom kružnice vpísanej trojuholníku CDE. (*Spojené kráľovstvo*)

6. Nech $m > 1$ je celé číslo. Postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je definovaná vzťahmi $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, a pre všetky $n \geqq 4$

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Nájdite všetky celé čísla m také, že každý člen tejto postupnosti je druhá mocnina celého čísla. (*Dánsko*)