2018/2019
68. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh EGMO*

(*Súťaž sa konala 7. – 13. 4. 2019.*)

1. Nájdite všetky trojice (a, b, c) reálnych čísel také, že platí $ab + bc + ca = 1$ a súčasne

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

(*Holandsko*)

2. Je dané kladné celé číslo n. Na štvorcovú tabuľku $2n \times 2n$ sú umiestnené dominá tak, že každé políčko tejto tabuľky je susedné s práve jedným políčkom pokrytým dominom. Pre každé n určte najväčší počet domín, ktoré môžeme takto umiestniť na túto tabuľku.

Poznámka. Dominom rozumieme obdĺžnik 2×1 alebo 1×2. Dominá sú umiestňované na tabuľku tak, že každé domino pokrýva práve dve políčka tabuľky a jednotlivé dominá sa neprekrývajú. Dve políčka tabuľky sú *susedné* práve vtedy, keď sú rôzne a majú spoločnú stranu.

(*Luxembursko*)

3. Je daný trojuholník ABC taký, že $|\measuredangle CAB| > |\measuredangle ABC|$. Označme I stred kružnice jemu vpísanej. Nech D je bod úsečky BC, pre ktorý platí $|\measuredangle CAD| = |\measuredangle ABC|$. Označme ω kružnicu, ktorá sa dotýka priamky AC v bode A a prechádza bodom I. Nech X ($X \neq A$) je priesečník kružnice ω a kružnice opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že osi uhlov DAB a CXB sa pretínajú na priamke BC. (*Poľsko*)

4. Nech I je stred kružnice ω vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica prechádzajúca bodom B, ktorá sa dotýka AI v bode I, pretína stranu AB v bode P ($P \neq B$). Analogicky, kružnica prechádzajúca bodom C, ktorá sa dotýka AI v bode I, pretína stranu AC v bode Q ($Q \neq C$). Dokážte, že priamka PQ je dotyčnica kružnice ω. (*Poľsko*)

5. Nech $n \geqq 2$ je celé číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú kladné celé čísla. Dokážte, že existujú kladné celé čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spĺňajúce nasledujúce tri podmienky:
(A) $a_i \leqq b_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$;
(B) zvyšky po delení čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ číslom n sú po dvoch rôzne; a
(C) $b_1 + \ldots + b_n \leqq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right\rfloor\right)$. (*Holandsko*)

6. Alena nakreslila na kružnici 2019 tetív s navzájom rôznymi krajnými bodmi. Bod nazveme označený, keď ide o
(i) jeden z 4038 krajných bodov týchto tetív; alebo
(ii) priesečník aspoň dvoch z týchto tetív.
Alena potom každý z označených bodov číselne ohodnotí. Zo všetkých 4038 krajných bodov spĺňajúcich (i) ohodnotí nejakých 2019 bodov číslom 0 a zvyšných 2019 bodov číslom 1. Následne ohodnotí všetky body spĺňajúce (ii) ľubovoľným celým číslom (nie nutne kladným). Pozdĺž každej tetivy uvažuje úsečky spájajúce po sebe idúce označené body. (Tetiva s k označenými bodmi obsahuje $k - 1$ takýchto úsečiek.) Ďalej ohodnotí každú takúto úsečku dvoma číslami, z ktorých jedno je žlté a druhé modré, pričom žlté čísla predstavujú súčet číselných ohodnotení koncových bodov na ohodnocovanej úsečke a modré čísla absolútnu hodnotu ich rozdielu. Následne Alena zistila, že medzi všetkými $N + 1$ žltými číslami sa každé z čísel $0, 1, \ldots, N$ vyskytuje práve raz. Dokážte, že aspoň jedno modré číslo je násobkom 3.

(*Spojené kráľovstvo*)