

2020/2021
70. ročník MO

Zadania úloh výberového sústredenia v kat. C

(Súťaž sa konala v pondelok 7. júna 2021.)

1. Do tabuľky 2021×2021 je vpísaných 2021^2 reálnych čísel tak, že súčet všetkých čísel v tabuľke je nezáporný. Rozhodnite, či je vždy možné preusporiadať stĺpce tejto tabuľky tak, aby súčet čísel na hlavnej diagonále bol nezáporný. (Hlavná diagonála spája ľavý horný a pravý dolný roh tabuľky.)

2. Je daný rovnobežník $ABCD$. Nech E, F, G, H sú postupne stredy jeho strán AB, BC, CD, DA . Priamky BH a AC sa pretínajú v bode I , priamky BD a EC v bode J , priamky AC a DF v bode K , priamky AG a BD v bode L . Dokážte, že štvoruholník $IJKL$ je rovnobežník.

3. Nájdite všetky usporiadané dvojice kladných celých čísel (a, b) takých, že $a - b$ je prvočíslo a ab je druhá mocnina celého čísla.

4. Predpokladajme, že štyri po dvoch rôzne reálne čísla a, b, c, d spĺňajú

$$(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d).$$

Určte všetky možné hodnoty súčtu $a + b + c + d$ a pre každú možnosť uveďte príklad štvorice vyhovujúcich čísel a, b, c, d s týmto súčtom.

5. Predpokladajme, že v trojuholníku ABC so stredom I kružnice vpísanej platí vzťah $|AC| + |AI| = |BC|$. Určte pomer $|\angle BAC| : |\angle CBA|$.