2019/2020
69. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 28. 8. – 3. 9. 2020.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých kladných celých čísel. Určte všetky kladné celé čísla k, pre ktoré existujú funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že g nadobúda nekonečne veľa hodnôt a

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

platí pre každé kladné celé číslo n.

Poznámka. Zápis f^i označuje funkciu f aplikovanú i-krát, t. j.

$$f^i(j) = \underbrace{f(f(\dots f(f}_{i\text{-krát}}(j))\dots)).$$

(*Chorvátsko*)

I-2. Kladné celé číslo N nazývame *nákazlivé*, ak existuje 1000 po sebe idúcich nezáporných celých čísel takých, že súčet všetkých ich cifier je rovný N. Nájdite všetky nákazlivé kladné celé čísla. (*Rakúsko*)

I-3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s tromi navzájom rôzne veľkými stranami, ktorého opísanú kružnicu označme ω a stred jemu vpísanej kružnice označme I. Predpokladajme, že ortocentrum H trojuholníka BIC leží vnútri ω. Nech M je stred dlhšieho oblúka BC kružnice ω. Nech N je stred kratšieho oblúka AM kružnice ω. Dokážte, že existuje kružnica, ktorá sa dotýka kružnice ω v bode N a dotýka sa aj kružníc opísaných trojuholníkom BHI a CHI. (*Poľsko*)

I-4. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existujú kladné celé čísla x_1, x_2, ..., x_n také, že

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

(*Chorvátsko*)

Súťaž družstiev: nekonala sa