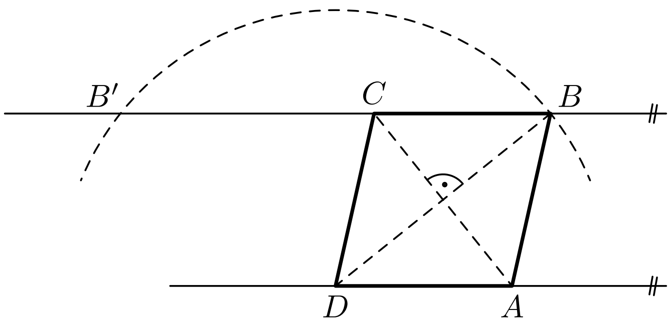
1. *Zostrojte kosoštvorec $ABCD$ tak, aby jeho uhlopriečka BD mala veľkosť 8 cm a vzdialenosť vrcholu B od priamky AD bola 5 cm. Určte všetky možnosti.* (Karel Pazourek)

Nápad. Aké vlastnosti majú uhlopriečky kosoštvorca?

Riešenie. Vzdialenosť bodu B od priamky AD je rovnaká ako vzdialenosť bodu C od AD, lebo BC a AD sú rovnobežné. Uhlopriečky v každom rovnobežníku sa navzájom rozpoľujú, v kosoštvorci sú navyše kolmé. Tieto postrehy stačia na zostrojenie kosoštvorca $ABCD$:

- zostrojíme dve rovnobežné priamky vo vzdialenosti 5 cm (napr. ako kolmice v koncových bodoch úsečky dĺžky 5 cm),
- na jednej priamke zvolíme bod D a zostrojíme kružnicu so stredom D a polomerom 8 cm,
- prienikom tejto kružnice s druhou priamkou je bod B, resp. B',
- zostrojíme os úsečky DB, resp. DB' (napr. pomocou priesečníkov dvoch zhodných kružníc so stredmi v koncových bodoch),
- prieniky tejto priamky s rovnobežkami sú body A a C, resp. A' a C',
- štvoruholník $ABCD$, resp. $A'B'C'D$, je kosoštvorec s požadovanými vlastnosťami.

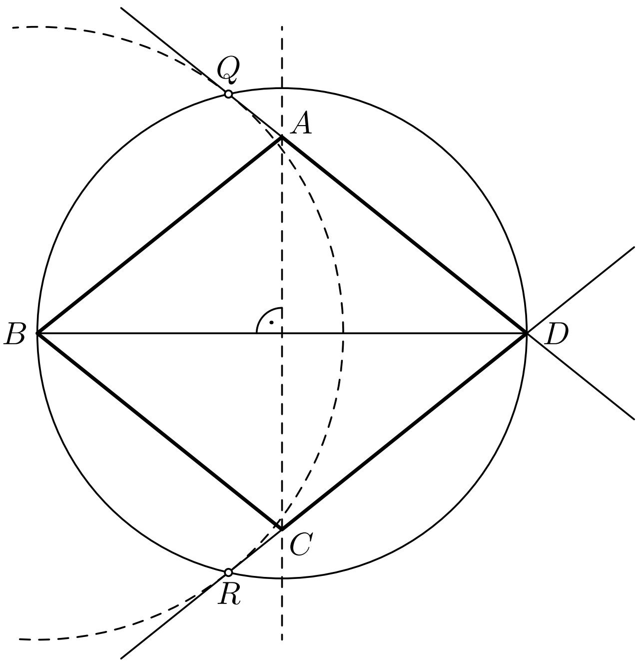


Všetky zostrojené kosoštvorca sú zhodné, úloha má až na zhodnosť jediné riešenie.

Poznámka. Konštrukciu je možné začať zostrojením úsečky BD a jej osi. Ak dokážeme zostrojiť priamky idúce bodom D vo vzdialenosti 5 cm od B, tak ich priesečníky s osou úsečky BD budú zvyšné vrcholy A a C kosoštvorca (vzdialenosti bodu B od priamok AD a CD sú rovnaké, lebo to sú veľkosti výšok na prislúchajúce strany kosoštvorca). Také priamky možno zostrojiť takto:

- zostrojíme kružnicu nad priemerom BD,
- zostrojíme kružnicu so stredom B a polomerom 5 cm,
- spojnice priesečníkov Q a R týchto kružníc s bodom D sú hľadané priamky.

Zdôvodnenie vyplýva z Tálesovej vety: uhly BQD a BRD sú pravé, teda úsečky DQ a DR sú výšky na prislúchajúce strany.



---

2. *Richard sa pohrával s dvoma päťcifernými číslami. Každé pozostávalo z navzájom rôznych cifier, ktoré pri jednom boli všetky nepárne a pri druhom všetky párne. Po chvíli zistil, že súčet týchto dvoch čísel začína dvojčíslím 11 a končí číslom 1 a že ich rozdiel začína číslom 2 a končí dvojčíslím 11. Určte Richardove čísla.* (Monika Dillingerová)

Nápad. Koľkociferné môžu byť súčty a rozdiely päťciferných čísel a ako by ste ich ručne počítali?

Riešenie. Súčet dvoch päťciferných čísel môže byť päťciferný alebo šesťciferný. Päťciferné súčty však nemôžu začínať cifrou 1, teda súčet je šesťciferný. Rozdiel dvoch päťciferných čísel môže byť nanajvýš päťciferný. Kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu si Richardove čísla označíme:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ +\ a\ b\ c\ d\ e \\ \hline 1\ 1\ *\ *\ *\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ -\ a\ b\ c\ d\ e \\ \hline *\ *\ *\ 1\ 1 \end{array}$$

Rôzne písmená predstavujú rôzne cifry, veľké zodpovedajú párnym, malé nepárnym, alebo naopak. Keďže cifier je 10, budú v Richardových číslach použité všetky.

Aby súčet začínal dvojčíslím 11, musí byť $A + a$ buď 11, alebo 10 (s prechodom cez desiatku). Avšak súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo, teda musí byť $A + a = 11$.

Ak by rozdiel bol nanajvýš štvorciferný, tak by $A-a$ muselo byť nanajvýš 1. Avšak rozdiel párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo, teda by muselo byť $A-a = 1$. Z toho a z predchádzajúceho $A + a = 11$ vychádza

$$A = 6, \quad a = 5.$$

Ak by rozdiel bol päťciferný a začínal 2, tak by $A-a$ muselo byť buď 2, alebo 3 (prechod cez desiatku). Avšak rozdiel párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo, teda by muselo byť $A - a = 3$. Z toho a z predchádzajúceho $A + a = 11$ vychádza

$$A = 7, \quad a = 4.$$

Aby súčet končil cifrou 1, musí byť buď $E + e = 1$, alebo $E + e = 11$. Aby rozdiel končil cifrou 1, musí byť buď $E - e = 1$, alebo $E = 0$ a $e = 9$. Predchádzajúce dve podmienky sú splnené súčasne buď pre

$$E = 6, \quad e = 5,$$

alebo pre

$$E = 1, \quad e = 0.$$

Predchádzajúca diskusia dáva štyri možnosti priradenia prvých a posledných cifier Richardových čísel. Aby boli splnené základné požiadavky (t. j. aby sa žiadna cifra neopakovala a aby jedno číslo bolo tvorené nepárnymi a druhé párnymi ciframi), musí byť $A = 7$, $a = 4$, $E = 1$ a $e = 0$:

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & B & C & D & 1 \\ + & 4 & b & c & d & 0 \\ \hline 1 & 1 & * & * & * & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 7 & B & C & D & 1 \\ - & 4 & b & c & d & 0 \\ \hline & 2 & * & * & 1 & 1 \end{array}$$

Aby v súčte bola na druhom mieste 1, musí byť $B + b < 10$, a aby rozdiel začínal 2, musí byť $B < b$. Zo zvyšných cifier týmto podmienkam vyhovuje jedine $B = 3$ a $b = 6$. Aby v rozdiele bola na predposlednom mieste 1, musí byť $D - d = 1$. Zo zvyšných cifier tejto podmienke vyhovuje jedine $D = 9$ a $d = 8$. Na posledné dve miesta tak ostáva $C = 5$ a $c = 2$.

Richardove čísla boli 73591 a 46280, predchádzajúce výpočty vychádzajú nasledovne:

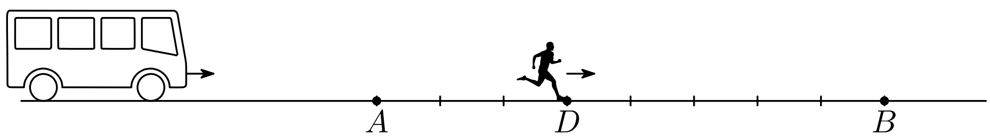
$$\begin{array}{cccccc} & 7 & 3 & 5 & 9 & 1 \\ + & 4 & 6 & 2 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 9 & 8 & 7 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 7 & 3 & 5 & 9 & 1 \\ - & 4 & 6 & 2 & 8 & 0 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

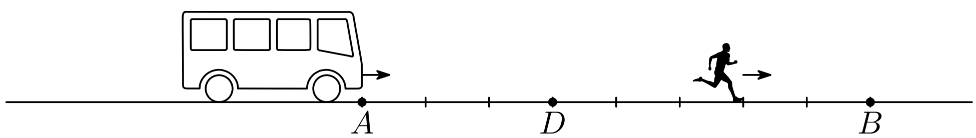
---

3. *Vendelín býva medzi dvoma zastávkami autobusu, a to v troch osminách ich vzdialenosti. Dnes vyrazil z domu a zistil, že či by utekal k jednej, alebo druhej zastávke, dorazil by na zastávku súčasne s autobusom. Priemerná rýchlosť autobusu je 60 km/h. Akou priemernou rýchlosťou dnes beží Vendelín?* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Znázornite situáciu na priamke a uvažujte oba prípady zvlášť.

Riešenie. Označme prvú zastávku na trase autobusu A, druhú B, Vendelínov dom D. Keby Vendelín bežal do A, tak kým tam autobus dôjde, zabehne práve vzdialenosť DA. Keby Vendelín bežal do B, tak kým autobus dôjde do A, zabehne rovnakú vzdialenosť DA smerom k B. Najneskôr tu si uvedomujeme, že D musí byť bližšie k A, a to v troch osminách vzdialenosti AB:





Teda pri behu do B bude v momente, keď autobus bude v A, Vendelínovi do cieľa chýbať $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ vzdialenosti AB. Aby do B dorazil súčasne s autobusom, musí mať štvrtinovú rýchlosť vzhľadom na autobus. Vendelín beží priemernou rýchlosťou $60 : 4 = 15\,(\mathrm{km/h})$.

---

4. *Pre päticu celých čísel platí, že keď k prvému pripočítame jednotku, druhé umocníme na druhú, od tretieho odčítame trojku, štvrté vynásobíme štyrmi a piate vydelíme piatimi, dostaneme zakaždým ten istý výsledok. Nájdite všetky také pätice čísel, ktorých súčet je 122.* (*Lenka Dedková*)

Nápad. Aké vlastnosti má číslo, ktoré je výsledkom opísaných operácií?

Riešenie. Výsledok opísaných operácií s každým z piatich čísel je stále rovnaký, a ten si označíme n. Potom prvé až piate číslo je postupne

$$n-1, \quad \sqrt{n}, \quad n+3, \quad \frac{n}{4}, \quad 5n.$$

Z druhého a štvrtého čísla zisťujeme dôležité obmedzenia, konkrétne že n je druhou mocninou prirodzeného čísla a že je deliteľné štyrmi.

Najmenšie číslo s týmito vlastnosťami je $n = 4$; v takom prípade by súčet čísel bol

$$3 + 2 + 7 + 1 + 20 = 33,$$

čo je málo. Ďalšie číslo s uvedenými vlastnosťami je $n = 16$; v takom prípade by súčet čísel bol

$$15 + 4 + 19 + 4 + 80 = 122,$$

čo je požadovaný výsledok. Ďalšie možnosti nie je nutné skúšať, lebo s rastúcim n rastie aj celkový súčet. Jediným riešením úlohy je pätica 15, 4, 19, 4, 80.

Iné riešenie. Päticu hľadaných čísel označíme a, b, c, d, e. Zo zadania vyplýva, že

$$a + 1 = b^2 = c - 3 = 4d = \frac{e}{5}.$$

Aby $d = \frac{b^2}{4}$ bolo celé, musí byť b^2 násobkom 4, teda b musí byť násobkom 2. To vyjadríme tak, že $b = 2k$ pre nejaké celé k. Z uvedených rovností odvodzujeme, že

$$a = 4k^2 - 1, \quad b = 2k, \quad c = 4k^2 + 3, \quad d = k^2, \quad e = 20k^2.$$

Súčet všetkých týchto čísel je $s = 29k^2 + 2k + 2$. Pre dostatočne veľké absolútne hodnoty k (t. j. bez ohľadu na znamienko) bude súčet väčší ako 122 a ďalej sa bude strmo zväčšovať. Postupným skúšaním zisťujeme nasledujúce:

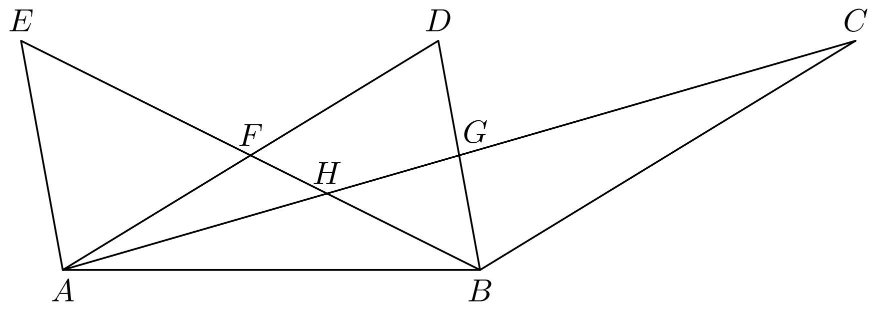
k	$\leqq -3$	-2	-1	0	1	2	$\geqq 3$
s	$\geqq 257$	114	29	2	33	122	$\geqq 269$

Súčet je rovný 122 práve pre $k = 2$, čo určuje päticu čísel

$$a = 15, \quad b = 4, \quad c = 19, \quad d = 4, \quad e = 80.$$

5. *Pre osem navzájom rôznych bodov ako na obrázku platí, že body C, D, E ležia na priamke rovnobežnej s priamkou AB, F je stredom úsečky AD, G je stredom úsečky AC a H je priesečníkom priamok AC a BE. Obsah trojuholníka BCG je $12\,cm^2$ a obsah štvoruholníka $DFHG$ je $8\,cm^2$. Určte obsahy trojuholníkov AFE, AHF, ABG a BGH.*

(*Eva Semerádová*)



Nápad. Viete porovnať obsahy niektorých útvarov priamo, t. j. bez konkrétnych hodnôt?

Riešenie. Trojuholníky ABC, ABD a ABE majú spoločnú stranu AB a rovnakú výšku na túto stranu, teda majú rovnaký obsah. Body F a G sú stredmi úsečiek AD a AC, teda priamka FG je rovnobežná s AB. Trojuholníky ABF a ABG majú spoločnú stranu AB a rovnakú výšku na túto stranu, ktorá je polovičná vzhľadom na výšku predchádzajúcich troch trojuholníkov. Teda trojuholníky ABF a ABG majú rovnaký obsah, ktorý je polovičný v porovnaní s obsahmi trojuholníkov ABC, ABD a ABE. Celkom z toho dostávame, že trojuholníky AFE, ABF, BDF, ADG, ABG a BCG majú rovnaký obsah, a to $12\,\mathrm{cm}^2$.

Trojuholník ADG je zložený z trojuholníka AHF a štvoruholníka $DFHG$, ktorý má obsah $8\,\mathrm{cm}^2$. Obsah trojuholníka AHF je teda rovný $12 - 8 = 4\,(\mathrm{cm}^2)$. Podobne, obsah trojuholníka BGH je taký istý.

Obsahy trojuholníkov AFE, AHF, ABG a BGH sú postupne 12, 4, 12 a 4 (cm^2).

Poznámka. Medzi zadanými objektmi sú vzťahy, ktoré sme nepoužili, ale ktoré dovoľujú alternatívne postupy pri riešení úlohy. Napr. možno priamo ukázať, že štvoruholníky $ABCD$ a $ABDE$ sú rovnobežníky, že trojuholníky AHF a BGH majú rovnaký obsah, že ich súčet je rovný obsahu štvoruholníka $DFHG$ a pod.

Pre zvedavých: v úlohe neurčený obsah trojuholníka ABH je rovný $8\,\mathrm{cm}^2$.

6. *V Kocúrkove používajú mince iba s dvoma hodnotami, ktoré sú vyjadrené v kocúrkovských korunách kladnými celými číslami. Pomocou dostatočného množstva takých mincí je možné zaplatiť akúkoľvek celočíselnú sumu väčšiu ako 53 kocúrkovských korún, a to presne a bez vydávania. Sumu 53 kocúrkovských korún však bez vydávania zaplatiť nemožno. Zistite, ktoré hodnoty mohli byť na kocúrkovských minciach. Určte aspoň dve riešenia.*

(*Alžbeta Bohiniková*)

Nápad. Môžu byť jedny z kocúrkovských mincí jednokoruny, alebo dvojkoruny, … ?

Riešenie. Budeme postupne uvažovať hodnotu jedných kocúrkovských mincí a uvažovať o hodnote druhých, aby boli splnené požiadavky zo zadania.

1) Ak by jedny z mincí mali hodnotu 1, tak by bolo možné zaplatiť akúkoľvek sumu.

2) Predpokladajme, že jedny z mincí majú hodnotu 2. Druhé mince nemôžu mať párnu hodnotu, lebo s takýmito mincami by bolo možné platiť iba párne sumy.

Druhé mince nemôžu mať nepárnu hodnotu menšiu ako 55, lebo s takýmito mincami by bolo možné zaplatiť sumu 53 (napr. $2 \cdot 2 + 49$, $2 + 51$). Keby druhé mince mali hodnotu 55, tak akékoľvek párne čiastky by bolo možné zaplatiť pomocou dostatočného množstva 2 a akákoľvek nepárna čiastka väčšia ako 53 by sa dala zaplatiť pomocou 55 a dostatočného množstva 2:

$$\begin{array}{llll} 54 = 27 \cdot 2 & 56 = 28 \cdot 2 & 58 = 29 \cdot 2 & \dots \\ 55 = 1 \cdot 55 & 57 = 2 + 1 \cdot 55 & 59 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 55 & \dots \end{array}$$

3) Predpokladajme, že jedny z mincí majú hodnotu 3. Druhé mince nemôžu mať hodnotu deliteľnú tromi, lebo s takýmito mincami by sa nedali zaplatiť iné sumy ako tie deliteľné tromi.

Druhé mince nemôžu mať hodnotu 5, 8, 11, ..., 53, lebo s takýmito mincami by bolo možné zaplatiť sumu 53 (napr. $16 \cdot 3 + 5$, $15 \cdot 3 + 8$, ..., $3 + 50$). V tejto skupine sme uvažovali hodnoty, ktoré po delení 3 dávajú zvyšok 2. Ďalšie hodnoty s rovnakými zvyškami sú 56, 59 atď. Ani tieto možnosti nevyhovujú, lebo s takýmito mincami by sa nedala zaplatiť napr. čiastka 55 (ktorá je menšia a po delení 3 dáva zvyšok 1).

Druhé mince nemôžu mať hodnotu 4, 7, 10, ..., 25, lebo s takýmito mincami by tiež bolo možné zaplatiť sumu 53 (napr. $15 \cdot 3 + 2 \cdot 4$, $13 \cdot 3 + 2 \cdot 7$, ..., $3 + 2 \cdot 25$). V tejto skupine sme uvažovali hodnoty, ktoré po delení 3 dávajú zvyšok 1. Keby druhé mince mali hodnotu 28, tak akékoľvek sumy väčšie ako 53 by sa dali platiť napr. takto:

$$\begin{array}{llll} 54 = 18 \cdot 3 & 57 = 19 \cdot 3 & 60 = 20 \cdot 3 & \dots \\ 55 = 9 \cdot 3 + 1 \cdot 28 & 58 = 10 \cdot 3 + 1 \cdot 28 & 61 = 11 \cdot 3 + 1 \cdot 28 & \dots \\ 56 = 2 \cdot 28 & 59 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 28 & 62 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 28 & \dots \end{array}$$

Zatiaľ máme dve riešenia: na kocúrkovských minciach mohli byť hodnoty 2, 55 alebo 3, 28. Obdobným (avšak o niečo namáhavejším) spôsobom možno ešte odhaliť možné hodnoty 4, 19 a 7, 10.

Poznámka. Problém, ktorý riešime v tejto úlohe, je známy ako tzv. Frobeniov problém: vyhovujúce dvojice hodnôt mincí a, b musia spĺňať $ab - a - b = 53$, čiže

$$(a-1)(b-1) = 54.$$

S týmto (netriviálnym) poznatkom vieme nepriamo overiť, že uvedené štyri prípady sú jediné možné.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019