69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

---

1. *Snehulienka so siedmimi trpaslíkmi nazbierali šišky na táborák. Snehulienka povedala, že počet všetkých šišiek je číslo deliteľné dvoma. Prvý trpaslík prehlásil, že je to číslo deliteľné tromi, druhý trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné štyrmi, tretí trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné piatimi, štvrtý trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné šiestimi, piaty trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné siedmimi, šiesty trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné ôsmimi, siedmy trpaslík povedal, že je to číslo deliteľné deviatimi. Dvaja z ôsmich zberačov, ktorí sa k počtu šišiek vyjadrovali bezprostredne po sebe, nemali pravdu, ostatní áno. Koľko šišiek bolo na hromade, ak ich určite bolo menej ako 350?* (Libuše Hozová)

Nápad. Ktoré čísla sú deliteľné štyrmi a pritom nie sú deliteľné dvoma?

Riešenie. Počet šišiek je číslo menšie ako 350, ktoré nie je deliteľné práve jednou dvojicou po sebe idúcich čísel z 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a všetkými ostatnými áno. Žiadna z dvojíc $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$ a $(6,7)$ to byť nemôže, lebo by sa medzi zvyšnými číslami vždy našlo nejaké ďalšie, ktorým by počet šišiek tiež nemohol byť deliteľný:

- nedeliteľnosť 2 vynucuje nedeliteľnosť 4, 6 a 8,
- nedeliteľnosť 3 vynucuje nedeliteľnosť 6 a 9,
- nedeliteľnosť 4 vynucuje nedeliteľnosť 8,
- nedeliteľnosť 6 vynucuje nedeliteľnosť 2 alebo 3.

Počet šišiek nie je deliteľný buď dvojicou čísel $(7,8)$, alebo $(8,9)$, a všetkými ostatnými číslami áno. Tento počet potom musí byť deliteľný aj najmenším spoločným násobkom ostatných čísel:

- V prvom prípade je najmenší spoločný násobok čísel 2, 3, 4, 5, 6, 9 rovný $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$. Jediný násobok 180 menší ako 350 je práve 180.
- V druhom prípade je najmenší spoločný násobok čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7 rovný $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$, čo je viac ako 350.

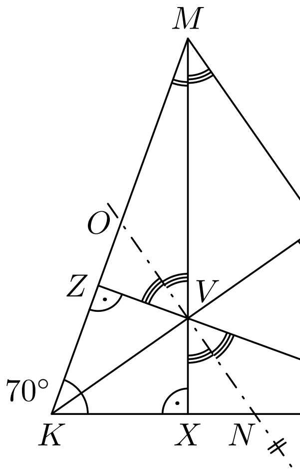
Snehulienka s trpaslíkmi nazbierali 180 šišiek.

---

2. *V ostrouhlom trojuholníku KLM je V priesečník jeho výšok a X je päta výšky na stranu KL. Os uhla XVL je rovnobežná so stranou LM a uhol MKL má veľkosť $70°$. Akú veľkosť majú uhly KLM a KML?* (Libuše Hozová)

Nápad. Znázornite si situáciu zo zadania a hľadajte zhodné uhly.

Riešenie. V danom trojuholníku označíme Y, Z päty ostatných výšok a N, O priesečníky osi uhla XVL so stranami KL, KM, pozri obrázok. V obrázku tiež vyznačujeme navzájom zhodné uhly:



V pravouhlom trojuholníku KZL poznáme uhly pri vrcholoch K a Z, teda uhol pri vrchole L má veľkosť $180° - 90° - 70° = 20°$. Podobne veľkosť uhla pri vrchole M v pravouhlom trojuholníku KXM je $20°$. Uhly KLZ a KMX sú preto zhodné.

Priamky NO a LM sú rovnobežné, preto sú uhly MLZ, LVN a OVZ navzájom zhodné (striedavé a súhlasné uhly). Z obdobného dôvodu sú aj uhly LMX, MVO a NVX navzájom zhodné. Priamka NO je osou uhla XVL, preto sú uhly LVN a NVX – a teda aj všetky ostatné pred chvíľou menované uhly – navzájom zhodné.

Celkom teda uhly KLM a KML sú zhodné. To sú vnútorné uhly v trojuholníku KLM, ktorého tretí uhol poznáme. Veľkosti uhlov KLM a KML sú $(180° - 70°) : 2 = = 55°$.

Poznámky. Zhodnosť uhlov KLM a KML znamená, že trojuholník KLM je rovnoramenný so základňou LM. Tento fakt možno priamo odvodiť nasledovne:

Priamka NO je rovnobežná so stranou LM, teda je kolmá na výšku na túto stranu. Keďže priamka NO je osou uhla XVL, sú uhly NVX a OVZ zhodné, a keďže je táto priamka kolmá na výšku KY, sú aj uhly KVX a KVZ zhodné. Trojuholníky KVX a KVZ sú pravouhlé a majú zhodné uhly pri vrchole V, preto majú zhodné uhly aj pri vrchole K. Teda výška KY je osou uhla LKM, čo znamená, že trojuholník KLM je rovnoramenný so základňou LM.

K veľkostiam konkrétnych uhlov možno dôjsť rôznymi spôsobmi, napr. nasledujúcou úvahou:

Trojuholníky KZL a VXL sú pravouhlé a majú spoločný uhol pri vrchole L. Vnútorné uhly týchto trojuholníkov pri vrcholoch K a V sú preto zhodné a majú veľkosť $70°$ (zo zadania). Priamka VN je osou uhla XVL, teda uhol NVX má veľkosť $35°$ $(70 : 2 = 35)$. Veľkosť uhla pri vrchole N v trojuholníku NVX je $55°$ $(90 - 35 = 55)$. Priamky VN a LM sú rovnobežné, teda uhly XNV a KLM sú zhodné (súhlasné uhly). Veľkosť uhla KLM je $55°$.

---

3. *Roman má rád kúzla a matematiku. Naposledy čaroval s trojcifernými alebo štvorcifernými číslami takto:*

- *z daného čísla vytvoril dve pomocné čísla tak, že ho rozdelil medzi ciframi na mieste stoviek a desiatok (napr. z čísla 581 by dostal 5 a 81),*
- *pomocné čísla sčítal a zapísal výsledok (v uvedenom príklade by dostal 86),*
- *od väčšieho z pomocných čísel odčítal menšie a výsledok zapísal za predchádzajúci súčet, čím vyčaroval výsledné číslo (v uvedenom príklade by dostal 8676).*

Z ktorých čísel mohol Roman vyčarovať a) 171, b) 1513? Určte všetky možnosti. Aké najväčšie číslo možno takto vyčarovať a z ktorých čísel môže vzniknúť? Určte všetky možnosti. (Monika Dillingerová)

Nápad. Akú úlohu hrajú nuly v Romanových číslach?

Riešenie. Po rozdelení pôvodného čísla mal Roman dve nanajvýš dvojciferné čísla. Ich súčet teda môže byť jednociferné, dvojciferné alebo trojciferné číslo. Ich rozdiel môže byť 0, jednociferné alebo dvojciferné číslo. Pritom súčet je vždy väčší ako rozdiel.

Číslo 171 mohol Roman dostať jedine tak, že súčet čísel po rozdelení pôvodného čísla bol 17 a rozdiel 1. Teda sčítal a odčítal čísla 9 a 8. Číslo 171 mohol Roman vyčarovať buď z čísla 908, alebo z čísla 809.

Číslo 1513 mohol Roman dostať dvoma spôsobmi:

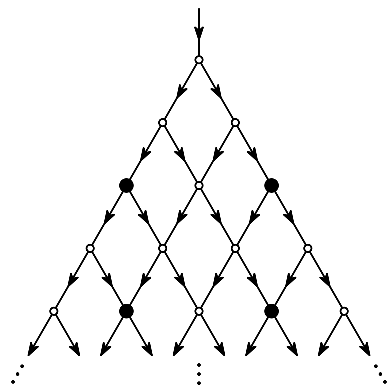
- Súčet čísel po rozdelení pôvodného čísla bol 15 a rozdiel 13. Teda sčítal a odčítal čísla 14 a 1.
- Súčet čísel po rozdelení pôvodného čísla bol 151 a rozdiel 3. Teda sčítal a odčítal čísla 77 a 74.

Číslo 1513 mohol Roman vyčarovať z niektorého z čísel 1401, 114, 7774, alebo 7477.

Výsledné číslo je aspoň dvojciferné a nanajvýš päťciferné. Päťciferné číslo vznikne zložením trojciferného súčtu a dvojciferného rozdielu dvojice čísel po rozdelení pôvodného čísla. Aby výsledné číslo bolo najväčšie možné, musí byť pomocný súčet najväčší možný, teda rozdiel najmenší možný (ale dvojciferný). Tieto požiadavky určujú dvojicu 99 a 89: $99 + 89 = 188$ a $99 - 89 = 10$, výsledné číslo je 18810, a to je možné vyčarovať buď z čísla 9989, alebo z čísla 8999.

---

4. *Janka a Marienku zaujalo vodné dielo, ktorého časť je znázornená na obrázku. Korytá sa postupne rozdeľujú a zasa spájajú v načrtnutých bodoch, v každom rade je o jeden taký bod viac ako v rade predchádzajúcom. Voda prúdi v naznačených smeroch a pri každom vetvení sa vodný tok rozdelí do dvoch korýt s rovnakým prietokom. Janka zaujímalo, koľko vody preteká v súčte štyrmi miestami zvýraznenými čierno. Marienku zaujímalo, koľko vody preteká v súčte všetkými miestami, ktoré sú v 2019. rade. Porovnajte celkové prietoky Jankovými a Marienkinými miestami.* (Katarína Jasenčáková)



Nápad. Koľko vody pretekalo všetkými miestami v druhom rade a koľko v treťom rade?

Riešenie. Keďže sa voda v korytách len delí a zasa spája (nikam sa nestráca a nič nepribúda), je súčet prietokov všetkými miestami v každom rade rovnaký ako na začiatku. Teda Marienka v 2019. rade pozoruje rovnaký prietok, ktorý by pozorovala na začiatku.

Pre určenie prietokov v Jankových vyznačených miestach budeme postupne prebiehať korytami a označovať, aké časti pôvodného prietoku sú v jednotlivých uzloch. Podľa zadania každé koryto privádza do vybraného uzla polovicu prietoku z uzla predchádzajúceho. Zhora postupne zisťujeme nasledujúce výsledky (ktoré kvôli lepšej prehľadnosti neupravujeme na základný tvar):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \boldsymbol{\frac{1}{4}} & & \frac{2}{4} & & \boldsymbol{\frac{1}{4}} & & \\
 & \frac{1}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{1}{8} & \\
\frac{1}{16} & & \boldsymbol{\frac{4}{16}} & & \frac{6}{16} & & \boldsymbol{\frac{4}{16}} & & \frac{1}{16}
\end{array}
$$

Prietoky Jankovými miestami v treťom, resp. piatom rade tvoria $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, resp. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ prietoku na začiatku. Celkom teda súčet prietokov všetkými štyrmi Jankovými miestami je rovnaký ako na začiatku. Celkové prietoky Jankovými a Marienkinými miestami sú rovnaké.

Poznámka pre riešiteľa. Spomeňte si na túto úlohu, až časom budete počuť o tzv. Pascalovom trojuholníku.

---

5. *Hviezdny štvorec je taká štvorcová tabuľka čísel, pre ktorú platí, že súčty čísel v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch sú stále rovnaké. Na obrázku je pozostatok hviezdneho štvorca, v ktorom boli čísla v jednom riadku a jednom stĺpci zotreté.*

1	*2*	*3*	
4	*5*	*6*	
7	*8*	*9*	

Doplňte chýbajúce čísla tak, aby všetky boli celé a práve štyri záporné. Určte všetky možnosti. (Eva Semerádová)

Nápad. Aké sú súčty zvyšných čísel v riadkoch a stĺpcoch?

Riešenie. Ak súčet čísel v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch označíme s, tak chýbajúce čísla v hviezdnom štvorci sú

1	2	3	$s-6$
4	5	6	$s-15$
7	8	9	$s-24$
$s-12$	$s-15$	$s-18$	$-2s+45$

Číslo $s-6$ je záporné pre $s<6$; podobne pre ďalšie doplnené čísla okrem $-2s+45$, ktoré je záporné pre $s>\frac{45}{2}$. Práve štyri záporné celé čísla dostávame pre $s=12$, 13 alebo 14:

1	2	3	6
4	5	6	-3
7	8	9	-12
0	-3	-6	21

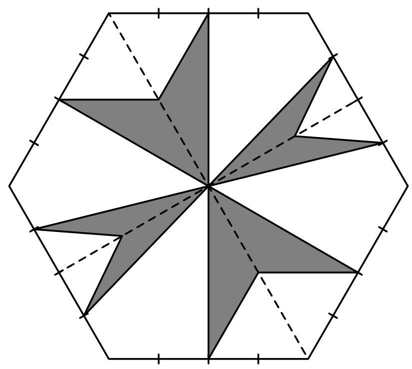
1	2	3	7
4	5	6	-2
7	8	9	-11
1	-2	-5	19

1	2	3	8
4	5	6	-1
7	8	9	-10
2	-1	-4	17

Poznámka. Namiesto všeobecných výrazov s neznámou s možno začať doplnením konkrétnych hodnôt tak, aby čísla v tabuľke tvorili hviezdny štvorec. Postupným zväčšovaním, príp. zmenšovaním čiastočných súčtov možno odvodiť vyššie uvedené doplnenia, v ktorých sú práve štyri záporné čísla.

---

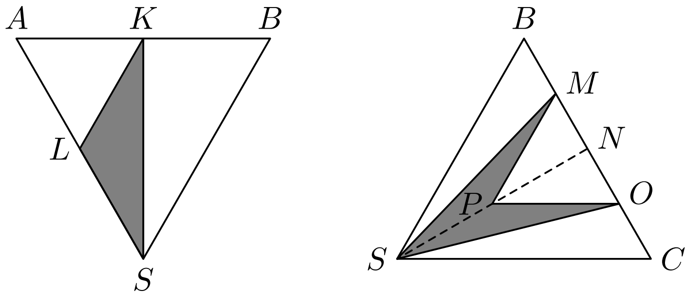
6. *Z pravidelného šesťuholníka bol vystrihnutý útvar ako na obrázku. Pritom vyznačené body ako na obvode, tak vnútri šesťuholníka delia prislúchajúce úsečky na štvrtiny. Aký je pomer obsahov pôvodného šesťuholníka a vystrihnutého útvaru?*



(*Alžbeta Bohiniková*)

Nápad. Rozdeľte útvar na vhodné menšie časti.

Riešenie. Šesťuholník je tvorený šiestimi zhodnými rovnostrannými trojuholníkmi. Vystrihnuté sivé útvary v týchto trojuholníkoch sú dvojakého typu:



V prvom prípade je K stredom úsečky AB a L je stredom úsečky SA. Trojuholníky SKL a SKA majú rovnakú výšku zo spoločného vrcholu K a zodpovedajúca strana SL je polovičná vzhľadom na stranu SA. Preto má trojuholník SKL polovičný obsah vzhľadom na trojuholník SKA. Z podobného dôvodu má trojuholník SKA polovičný obsah vzhľadom na trojuholník SBA. Celkom má sivá časť štvrtinový obsah vzhľadom na trojuholník SBA.

V druhom prípade je N stredom úsečky BC, M je stredom úsečky BN, O je stredom úsečky NC a P je stredom úsečky NS. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade zdôvodníme, že trojuholník SMP má polovičný obsah vzhľadom na trojuholník SMN, ten má polovičný obsah vzhľadom na trojuholník SBN, a ten má polovičný obsah vzhľadom na trojuholník SBC. Celkom trojuholník SMP má osminový obsah vzhľadom na trojuholník SBC. Trojuholník SOP je zhodný s trojuholníkom SMP. Celkom má sivá časť štvrtinový obsah vzhľadom na trojuholník SBC.

Pre každý zo šiestich pomocných trojuholníkov platí, že pomer jeho obsahu a obsahu sivého útvaru je 4 : 1. Pomer obsahov pôvodného šesťuholníka a vystrihnutého útvaru je preto taký istý.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019