2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Na tabuli sú napísané práve tri (nie nutne rôzne) reálne čísla. Vieme, že súčet ľubovoľných dvoch z nich je tam napísaný tiež. Určte všetky trojice takých čísel.*
(Ján Mazák)

Riešenie. Označme čísla napísané na tabuli a, b, c. Súčet $a+b$ sa tiež nachádza na tabuli, je teda rovný jednému z čísel a, b, c. Keby $a+b$ bolo rovné a alebo b, bola by na tabuli aspoň jedna nula. Rozoberieme preto tri prípady podľa počtu núl napísaných na tabuli.

Ak sú na tabuli aspoň dve nuly, ľahko sa presvedčíme, že súčet každých dvoch čísel z tabule je tam tiež. Dostávame, že trojica $t, 0, 0$ je pre ľubovoľné reálne číslo t riešením úlohy.

Ak je na tabuli práve jedna nula, je tam trojica $a, b, 0$, pričom a aj b sú nenulové čísla. Súčet $a+b$ teda nie je rovný ani a, ani b, musí preto byť rovný 0. Dostávame tak ďalšiu trojicu $t, -t, 0$, ktorá je riešením úlohy pre ľubovoľné reálne číslo t.

Ak na tabuli nie je ani jedna nula, súčet $a+b$ nie je rovný ani a, ani b, preto $a+b=c$. Z rovnakých dôvodov je $b+c=a$ a $c+a=b$. Dostali sme sústavu troch lineárnych rovníc s neznámymi a, b, c, ktorú môžeme vyriešiť. Avšak hneď z prvých dvoch rovníc po dosadení vyjde $b+(a+b)=a$, čiže $b=0$. To je v spore s tým, že na tabuli žiadna nula nie je.

Záver. Úlohe vyhovujú trojice $t, 0, 0$ a $t, -t, 0$ pre ľubovoľné reálne číslo t a žiadne iné.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ neoverí správnosť nájdených trojíc a táto správnosť nevyplýva priamo z jeho postupu, dajte najviac 5 bodov. Len za objavenie všetkých trojíc dajte 2 body. Za objavenie neúplnej, ale nekonečnej množiny vyhovujúcich trojíc dajte 1 bod.

---

2. *Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je číslo n^2+6n druhou mocninou celého čísla.*
(Vojtech Bálint)

Riešenie. Zrejme $n^2+6n > n^2$ a zároveň $n^2+6n < n^2+6n+9 = (n+3)^2$. V uvedenom intervale ležia iba dve druhé mocniny celých čísel: $(n+1)^2$ a $(n+2)^2$.

V prvom prípade máme $n^2+6n = n^2+2n+1$, teda $4n=1$, tomu však žiadne celé číslo n nevyhovuje.

V druhom prípade máme $n^2+6n = n^2+4n+4$, teda $2n=4$. Dostávame tak jediné riešenie $n=2$.

Iné riešenie. Budeme skúmať rozklad $n^2+6n = n(n+6)$. Spoločný deliteľ oboch čísel n a $n+6$ musí deliť aj ich rozdiel, preto ich najväčším spoločným deliteľom môžu byť len čísla 1, 2, 3 alebo 6. Tieto štyri možnosti rozoberieme.

Keby boli čísla n a $n+6$ nesúdeliteľné, muselo by byť každé z nich druhou mocninou. Rozdiel dvoch druhých mocnín prirodzených čísel však nikdy nie je 6. Pre malé čísla sa o tom ľahko presvedčíme, a pre $k \geqq 4$ už je rozdiel susedných štvorcov k^2 a $(k-1)^2$ aspoň 7. Vlastnosť, že 1, 3, 4, 5 a 7 je päť najmenších rozdielov dvoch druhých mocnín, využijeme aj ďalej.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n+6$ číslo 2, je $n=2m$ pre vhodné m, ktoré navyše nie je deliteľné tromi. Ak $n(n+6) = 4m(m+3)$ je štvorec, musí byť aj $m(m+3)$ štvorec. Čísla m a $m+3$ sú však nesúdeliteľné, preto musí byť každé z nich druhou mocninou prirodzeného čísla. To nastane len pre $m = 1$, čiže $n = 2$. Ľahko overíme, že $n(n+6)$ je potom naozaj druhou mocninou celého čísla.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n+6$ číslo 3, je $n = 3m$ pre vhodné nepárne m. Ak $n(n+6) = 9m(m+2)$ je štvorec, musia byť nesúdeliteľné čísla m a $m+2$ tiež štvorce. Také dva štvorce však neexistujú.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n+6$ číslo 6, je $n = 6m$ pre vhodné m. Ak $n(n+6) = 36m(m+1)$ je štvorec, musia byť štvorce aj obe nesúdeliteľné čísla m a $m+1$, čo nastane len pre $m = 0$, my však hľadáme len kladné čísla n.

Úlohe vyhovuje jedine $n = 2$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ úlohu zredukuje na zvládnuteľný konečný počet možností pre n (napríklad ako v prvom riešení), udeľte 4 body. Za úvahu typu „n a $n+6$ sú pre n nedeliteľné 2 a 3 nesúdeliteľné, preto to musia byť štvorce“ bez redukcie na konečný počet možností dajte najviac 3 body. Za objav riešenia $n = 2$ bez dôkazu neexistencie iného riešenia nedávajte žiadny bod.

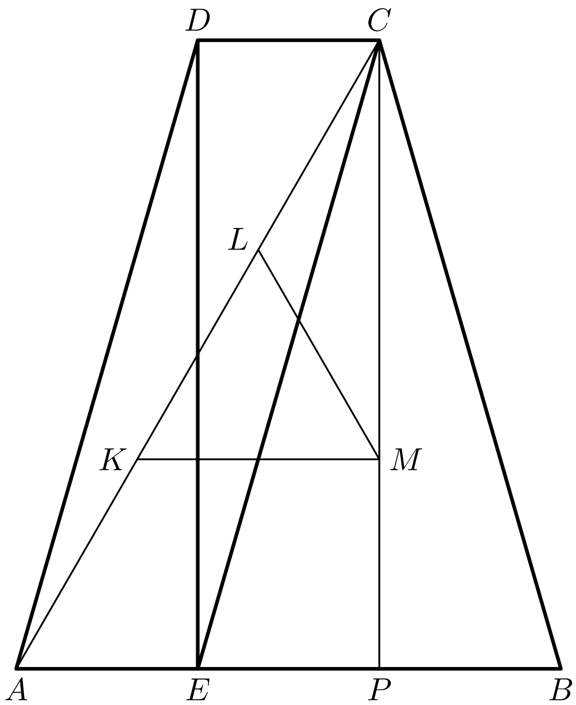
---

3. *V lichobežníku $ABCD$ má základňa AB dĺžku* 18 cm *a základňa CD dĺžku* 6 cm. *Pre bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Body K, L, M, ktoré sú postupne ťažiskami trojuholníkov ADE, CDE, BCE, tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.*

a) Dokážte, že priamky KM a CM zvierajú pravý uhol.

b) Vypočítajte dĺžky ramien lichobežníka $ABCD$. (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Štvoruholník $AECD$ je rovnobežník, pretože jeho strany AE a CD sú rovnobežné a rovnako dlhé (obe merajú 6 cm). Na jeho uhlopriečke AC tak leží ťažnica trojuholníka ADE z vrcholu A aj ťažnica trojuholníka CDE z vrcholu C, a preto na tejto priamke ležia aj body K a L (obr. 1). Navyše vieme, že ťažisko trojuholníka delí jeho ťažnice v pomere 2 : 1, preto sú úsečky AK, KL a LC rovnako dlhé.



Obr. 1

Bod L je stredom úsečky KC, preto na osi súmernosti úsečky KM leží nielen výška rovnostranného trojuholníka KLM, ale aj stredná priečka trojuholníka KMC. Preto je priamka CM kolmá na KM.

Ostáva vypočítať dĺžky ramien lichobežníka $ABCD$. Označme P stred úsečky EB. Keďže CM je kolmá na KM, je ťažnica CP kolmá na EB, takže trojuholník EBC je rovnoramenný, a teda aj daný lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný. Dĺžku ramena BC teraz vypočítame z pravouhlého trojuholníka PBC, v ktorom poznáme dĺžku odvesny PB. Pre druhú odvesnu CP zrejme platí

$$|CP| = \frac{3}{2}|CM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|KM|,$$

čo jednoducho vyplýva z vlastností trojuholníka KMC. A keďže z podobnosti trojuholníkov KMC a APC máme $|KM| = \frac{2}{3}|AP|$, dostávame (počítané v centimetroch)

$$|CP| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|KM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|AP| = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}|AB| = 12\sqrt{3}.$$

Potom

$$|BC| = \sqrt{|PB|^2 + |PC|^2} = \sqrt{36 + 12^2 \cdot 3} = 6\sqrt{1 + 12} = 6\sqrt{13}.$$

Ramená daného lichobežníka majú dĺžku $6\sqrt{13}\,\mathrm{cm}$.

Alternatívny dôkaz kolmosti priamok KM a CM. Keďže bod L je stredom úsečky KC a zároveň $|LK| = |LM|$, lebo trojuholník KLM je rovnostranný, leží bod M na Tálesovej kružnici nad priemerom KC, takže trojuholník KMC je pravouhlý.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za dôkaz kolmosti priamok KM a CM a 3 body za výpočet dĺžok oboch ramien lichobežníka $ABCD$. Neúplné riešenie hodnoťte podľa pokroku, ktorý žiak dosiahol. V uvedenom riešení by rozdelenie bodov bolo nasledujúce: dôkaz kolmosti KM a CM – 3 body, z toho 1 bod za zdôvodnenie toho, že bod L je stredom úsečky KC; výpočet dĺžky úsečky KM – 1 bod; výpočet dĺžky jednotlivých ramien – po 1 bode.

---

4. *Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel $x + y + z - xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ je nezáporné.* (*Stanislava Sojáková*)

Riešenie. Ukážeme, že ak je číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné.

Ak $xy + yz + zx < 3$, je aspoň jedno z čísel xy, yz, zx menšie ako 1, napr. xy. Potom $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjavne súčet troch kladných čísel.

Iné riešenie. Ukážeme, že ak je číslo $x+y+z-xyz$ záporné, tak číslo $xy+yz+zx-3$ je kladné.

Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$. Tým skôr $x < xyz$. Po skrátení kladného čísla x dostaneme $yz > 1$. Podobne odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Teraz ich stačí sčítať a máme $xy + yz + zx > 3$.

Iné riešenie. Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obe tieto nerovnosti sú symetrické, preto môžeme predpokladať, že čísla x, y, z sú označené tak, že z je najmenšie. Z druhej nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, teda $x + y < 2z$. To je však spor s tým, že číslo z je najmenšie.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.