1. *Stará mama povedala vnúčatám: „Dnes mám 60 rokov a 50 mesiacov a 40 týždňov a 30 dní.“ Koľké narodeniny mala stará mama naposledy?* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Koľko celých rokov je 50 mesiacov?

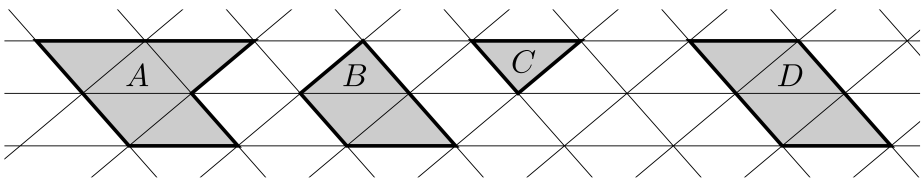
Riešenie. 50 mesiacov sú štyri roky a 2 mesiace. Teda stará mama mala aspoň 64 rokov. Zvyšné 2 mesiace, 40 týždňov a 30 dní predstavujú zhruba jeden ďalší rok. Potrebujeme presne zistiť, či je to viac alebo menej, preto uvedené údaje prepočítame na dni.

2 mesiace môžu mať 59 dní (január a február, príp. február a marec v nepriestupnom roku), 60 dní (január a február, príp. február a marec v priestupnom roku), 61 dní (skoro všetky ostatné dvojice mesiacov), alebo 62 dní (júl a august, príp. december a január). 40 týždňov a 30 dní je $40 \cdot 7 + 30 = 310$ dní.

Celkom teda 2 mesiace, 40 týždňov a 30 dní predstavujú najmenej 369 a najviac 372 dní. To je vždy viac ako rok (a menej ako dva). Stará mama mala naposledy 65. narodeniny.

---

2. *Na obrázku je trojuholníková sieť a v nej štyri mnohouholníky. Obvody mnohouholníkov A, B a D sú postupne 56 cm, 34 cm a 42 cm. Určte obvod trojuholníka C.*



(*Karel Pazourek*)

Nápad. Aká je dĺžka jednej vodorovnej úsečky trojuholníkovej siete?

Riešenie. Obvody mnohouholníkov A a B sa líšia o dve vodorovné úsečky, čo zodpovedá $56 - 34 = 22$ (cm). Jedna vodorovná úsečka je teda 11 cm dlhá.

Obvod mnohouholníka D je tvorený dvoma vodorovnými úsečkami (—) a štyrmi spätne šikmými úsečkami (\), čo dáva dokopy 42 cm. Tieto štyri spätne šikmé úsečky majú v súčte $42 - 22 = 20$ (cm), teda jedna je 5 cm dlhá.

Obvod mnohouholníka B je tvorený jednou vodorovnou (—), tromi spätne šikmými (\) a jednou šikmou (/) úsečkou, čo je 34 cm. Jedna šikmá úsečka je preto dlhá $34 - 11 - 3 \cdot 5 = 8$ (cm).

Obvod trojuholníka C je rovný $11 + 5 + 8 = 24$ (cm).

---

3. *Na písomke bolo 25 úloh trojakého druhu: ľahké po 2 bodoch, stredne ťažké po 3 bodoch a ťažké po 5 bodoch. Správne vyriešené úlohy boli hodnotené uvedeným počtom bodov podľa stupňa obťažnosti, inak 0. Najlepšie možné celkové hodnotenie písomky bolo 84 bodov. Peter správne vyriešil všetky ľahké úlohy, polovicu stredne ťažkých a tretinu ťažkých. Koľko bodov získal Peter za svoju písomku?* (*Alžbeta Bohiniková*)

Nápad. Mohli byť v teste práve štyri ťažké úlohy?

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že v písomke bol párny počet stredne ťažkých úloh a počet ťažkých úloh bol násobkom troch. Budeme postupne uvažovať možné počty ťažkých úloh a diskutovať dôsledky:

- Ak by ťažké úlohy boli 3, tak by stredne ťažkých a ľahkých úloh bolo dokopy $25 - 3 = 22$ a ich najlepšie možné hodnotenie by bolo $84 - 3 \cdot 5 = 69$ bodov. To však nie je možné, pretože stredne ťažkých úloh bol párny počet a ľahké úlohy boli hodnotené po 2 bodoch, avšak 69 nie je párne číslo. (Iným dôvodom môže byť, že ani 22 stredne ťažkých úloh by nedalo 69 bodov.)
- Ak by ťažkých úloh bolo 6, tak by stredne ťažkých a ľahkých úloh bolo dokopy $25 - 6 = 19$ a ich najlepšie možné hodnotenie by bolo $84 - 6 \cdot 5 = 54$ bodov. Keby stredne ťažké aj ľahké úlohy boli hodnotené rovnako po 2 bodoch, tak by týchto 19 úloh bolo hodnotených $2 \cdot 19 = 38$ bodmi, čo je o 16 menej ako 54. Keďže rozdiel v hodnotení stredne ťažkých a ľahkých úloh je práve jeden bod, zodpovedá predchádzajúci rozdiel 16 práve počtu stredne ťažkých úloh. Ľahkých úloh by tak bolo $19 - 16 = 3$. V takom prípade by Peter správne vyriešil 3 ľahké úlohy, 8 stredne ťažkých a 2 ťažké. Za takú písomku by získal

$$3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 40 \text{ bodov.}$$

- Ak by ťažkých úloh bolo 9, tak by stredne ťažkých a ľahkých úloh bolo dokopy $25 - 9 = 16$ a ich najlepšie možné hodnotenie by bolo $84 - 9 \cdot 5 = 39$ bodov. To však nie je možné z rovnakého dôvodu ako v prvom diskutovanom prípade.
- Ak by ťažkých úloh bolo 12, tak by stredne ťažkých a ľahkých úloh bolo dokopy $25 - 12 = 13$ a ich najlepšie možné hodnotenie by bolo $84 - 12 \cdot 5 = 24$ bodov. To však nie je možné, lebo už 13 ľahkých úloh zodpovedá 26 bodom, čo je viac ako 24.
- Ďalej nie je nutné pokračovať, pretože práve pozorovaný rozdiel v hodnotení by sa len zväčšoval.

  Vychádza jediná možnosť, a to, že Peter získal 40 bodov.

Poznámka. Ktorýkoľvek argument v predchádzajúcej diskusii možno nahradiť systematickým skúšaním a overovaním podmienok zo zadania. Úplná diskusia v tomto duchu je veľmi prácna, nemôže byť v tejto kategórii vyžadovaná, ale mala by byť uspokojivo naznačená. Pri hodnotení úlohy túto požiadavku zohľadnite.

---

4. *Raz si kráľ zavolal všetky svoje pážatá a postavil ich do radu. Prvému pážaťu dal určitý počet dukátov, druhému dal o dva dukáty menej, tretiemu opäť o dva dukáty menej a tak ďalej. Keď došiel k poslednému pážaťu, dal mu príslušný počet dukátov, otočil sa a obdobným spôsobom postupoval na začiatok radu (t. j. predposlednému pážaťu dal o dva dukáty menej ako pred chvíľou poslednému atď.). Na prvé páža v tomto kole vyšli dva dukáty. Potom jedno z pážat zistilo, že má 32 dukátov. Koľko mohol mať kráľ pážat a koľko celkom im mohol rozdať dukátov? Určte všetky možnosti.* (Karel Pazourek)

Nápad. Koľkokrát ktoré páža dostávalo dukáty?

Riešenie. Posledné páža dostávalo dukáty iba raz, naproti tomu ostatné pážatá dvakrát.

Pritom predposledné páža dostalo dvojnásobok toho, čo posledné: najskôr o 2 dukáty viac ako posledné, potom o 2 dukáty menej.

Všetky okrem posledného pážaťa dostali rovnako: najskôr dostal každý o 2 dukáty viac ako nasledujúci sused v rade, potom o 2 dukáty menej ako ten istý sused.

Navyše počet dukátov posledného pážaťa bol dvojnásobkom počtu pážat: kráľ postupne znižoval príspevok o 2 dukáty a v druhom kole dostalo prvé páža 2 dukáty.

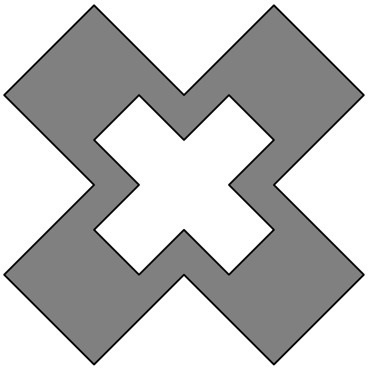
Sú teda dve možnosti:

- 32 dukátov malo posledné páža. Teda pážat bolo 16 a každé z 15 ostatných pážat malo 64 dukátov. Kráľ celkom rozdal $15 \cdot 64 + 32 = 992$ dukátov.
- 32 dukátov mali všetky pážatá okrem posledného. Teda posledné malo 16 dukátov a pážat bolo 8. Kráľ celkom rozdal $7 \cdot 32 + 16 = 240$ dukátov.

Kráľ mohol mať 16 pážat a rozdať 992 dukátov, alebo 8 pážat a 240 dukátov.

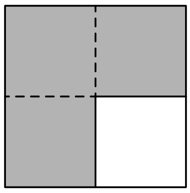
---

5. *Útvar na obrázku vznikol tak, že z veľkého kríža bol vystrihnutý malý kríž. Každý z týchto krížov môže byť zložený z piatich zhodných štvorcov, pričom strany malých štvorcov sú polovičné vzhľadom na strany veľkých štvorcov. Obsah sivého útvaru je $45\,cm^2$. Aký je obsah veľkého kríža?* (*Lucie Růžičková*)



Nápad. Koľkokrát sa vojde malý štvorec do veľkého?

Riešenie. Dĺžka strany veľkého štvorca je dvojnásobkom dĺžky strany malého štvorca, preto je obsah veľkého štvorca štvornásobkom obsahu malého štvorca, pozri obrázok. Keď z veľkého štvorca odstránime malý štvorec, zvyšný útvar má obsah $\frac{3}{4}$ veľkého štvorca. Teda veľký štvorec má obsah $\frac{4}{3}$ zvyšného útvaru.



Útvar v zadaní úlohy vznikol odobratím piatich malých štvorcov od piatich veľkých štvorcov (pričom presné umiestnenie štvorcov nie je pre určovanie obsahov podstatné). Vzťahy medzi ich obsahmi sú teda rovnaké ako vo vyššie diskutovanom prípade. Obsah veľkého kríža je rovný

$$\frac{4}{3} \cdot 45 = 60\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Ak S označuje obsah malého štvorca, tak obsah malého kríža je $5S$, obsah veľkého štvorca je $4S$ a veľkého kríža je $20S$. Obsah sivého útvaru je $(20-5)S = 15S = 45\,\mathrm{cm}^2$, teda $S = 3\,\mathrm{cm}^2$ a obsah veľkého kríža je $20 \cdot 3 = 60\,(\mathrm{cm}^2)$.

6. *Majka skúmala viacciferné čísla, v ktorých sa po jednej striedajú nepárne a párne cifry. Tie, ktoré začínajú nepárnou cifrou, nazvala komické a tie, ktoré začínajú párnou cifrou, nazvala veselé. (Napr. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.) Medzi trojcifernými číslami určte, či je viac komických alebo veselých, a o koľko.*

(*Monika Dillingerová*)

Nápad. Koľko je trojciferných komických čísel začínajúcich 12? A koľko ich začína jednotkou?

Riešenie. Ako nepárnych, tak párnych cifier je päť. Pri komických číslach môže na prvom mieste byť ktorákoľvek z nepárnych cifier 1, 3, 5, 7, 9. Pre každú z týchto piatich možností môže na druhom mieste byť ktorákoľvek z párnych cifier 0, 2, 4, 6, 8, čo dáva $5 \cdot 5 = 25$ možností. Pre každú z týchto 25 možností môže na treťom mieste byť ktorákoľvek z nepárnych cifier, čo dáva $25 \cdot 5 = 125$ možností. Trojciferných komických čísel je 125.

Počítanie trojciferných veselých čísel je obdobné, len na prvom mieste nemôže byť 0. Trojciferných veselých čísel teda je $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

Trojciferných komických čísel je o 25 viac ako veselých.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019