
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

1 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žiaci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do päťíc, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šesťíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

(Josef Tkadlec)

2 Určte všetky štvorice rôznych dvojmiestnych prirodzených čísel, pre ktoré zároveň platí:

- (i) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 2, je 80.
- (ii) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 3, je 90.
- (iii) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 5, je 60.

(Jaroslav Zhouf)

3 Vnútri strany BC trojuholníka ABC sú dané body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, vnútri strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojuholník ohraničený úsečkami AE, GD, BF . Dokážte, že pomer obsahu tohto trojuholníka a obsahu trojuholníka ABC má jedinú možnú hodnotu, a určte ju.

(Jaroslav Zhouf)

4 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný nule a zároveň súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný nule. Určte najväčší možný súčet všetkých čísel v tabuľke.

(Patrik Bak)

5 Je daný rovnostranný trojuholník ABC a vnútri jeho strany AB bod D . Na polpriamke opačnej k BC zostrojme bod E taký, že $|CD| = |DE|$. Dokážte, že platí $|AD| = |BE|$.

(Jaroslav Švrček)

6 Určte všetky možné hodnoty súčtu $a + b + c + d$, kde a, b, c, d sú kladné celé čísla spĺňajúce rovnosť

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

(Mária Dományová, Patrik Bak)

Termín odovzdania riešení: **17. 1. 2022**
