
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

1 Pravoúhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán a obvod 11990. Navyše vieme, že jedna jeho odvesna má prvočíselnú dĺžku. Určte ju.

(Patrik Bak)

2 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC . Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F taký bod, že $ABFC$ je rovnobežník. Dokážte, že $|FD| = |FE|$.

(Patrik Bak, Josef Tkadlec)

3 Určte počet deväťmiestnych čísel, v ktorých sa každá z číslic 0 až 9 vyskytuje najviac raz a v ktorých sa súčty číslic na 1. až 3. mieste, na 3. až 5. mieste, na 5. až 7. mieste a na 7. až 9. mieste vždy rovnajú 10. Nájdite aj najmenšie a najväčšie z týchto čísel.

(Jaroslav Zhouf)

4 Určte počet reálnych koreňov rovnice

$$x \cdot |x + 6p| = 36$$

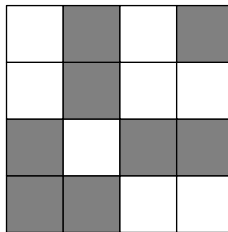
v závislosti na reálnom parametri p .

(Vojtech Bálint)

5 Nech $A_1A_2 \dots A_n$ je pravidelný n -uholník. Bod A_3 zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi A_2A_4 , získame tak bod A'_3 . Potom bod A'_3 zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi A_1A_3 , čím získame bod A''_3 . Pre ktoré n také, že $n \geq 4$, je bod A''_3 totožný s priesečníkom priamok A_1A_2 a A_3A_4 ?

(Jaroslav Zhouf)

6 Je daná šachovnica $m \times n$, ktorej políčka sú ofarbené čiernou a bielou farbou klasickým spôsobom tak, že ľavé horné políčko je čierne. *Ťahom* rozumieme vzájomnú výmenu dvoch riadkov alebo vzájomnú výmenu dvoch stĺpcov šachovnice. *Škvrou* rozumieme takú neprázdnu množinu čiernych políčok, ktorá je tvorená všetkými políčkami, do ktorých možno z jedného jej políčka prejsť po ceste pozostávajúcej z čiernych políčok susediacich stranou. Napríklad na obrázku je šachovnica 4×4 s práve štyrmi škvroumi. V závislosti na kladných celých číslach m a n určte, koľko najmenej škvroun môže byť na šachovnici $m \times n$ po vykonaní konečného počtu ťahov.



(David Hruška)

Termín odovzdania riešení: 17. 1. 2022
