2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

---

1. *Martin má na papieri napísané päťciferné číslo s piatimi rôznymi ciframi a nasledujúcimi vlastnosťami:*

- *škrtnutím druhej cifry zľava (t. j. cifry na mieste tisícok) dostane číslo, ktoré je deliteľné dvoma,*
- *škrtnutím tretej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné tromi,*
- *škrtnutím štvrtej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné štyrmi,*
- *škrtnutím piatej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné piatimi,*
- *ak neškrtne žiadnu cifru, má číslo deliteľné šiestimi.*

Ktoré najväčšie číslo môže mať Martin napísané na papieri? (M. Petrová)

Riešenie. Cifry Martinovho čísla postupne označíme a, b, c, d, e, číslo z nich utvorené $\overline{abcde}$. Rozoberme postupne všetkých päť podmienok:

1. číslo $\overline{acde}$ je deliteľné dvoma, teda cifra e je 0, 2, 4, 6 alebo 8,
2. číslo $\overline{abde}$ je deliteľné tromi, teda súčet $a+b+d+e$ je deliteľný troma,
3. číslo $\overline{abce}$ je deliteľné štyrmi, teda číslo $\overline{ce}$ je deliteľné štyrmi,
4. číslo $\overline{abcd}$ je deliteľné piatimi, teda cifra d na konci je 0 alebo 5,
5. číslo $\overline{abcde}$ je deliteľné šiestimi, čo znamená, že je deliteľné dvoma a tromi zároveň, t. j. číslo e je párne (vieme už z prvej podmienky) a súčet $a+b+c+d+e$ je deliteľný tromi.

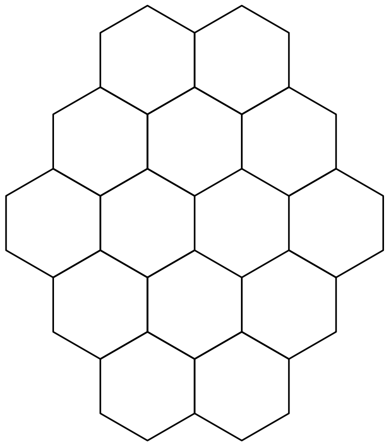
Keď dáme dokopy druhú a piatu podmienku, dostávame, že číslo c je takisto deliteľné tromi. Cifra c je preto 0, 3, 6 alebo 9. Vidíme, že na cifry c, d, e sú kladené samostatné podmienky, na cifry a a b nie. Pri hľadaní najväčšieho vyhovujúceho čísla budeme postupne preverovať čísla vytvorené podľa nasledujúcich zásad: číslo budeme vytvárať zľava a vždy zvolíme najväčšiu možnú cifru takú, aby cifry boli navzájom rôzne, aby platili samostatné podmienky pre cifry c, d, e a aby nevzniklo číslo už preverené. Na rozhodnutie, či takto vytvorené číslo spĺňa všetky zadané podmienky, stačí overiť druhú a tretiu podmienku:

- 98 654: súčet $9+8+5+4=26$ nie je deliteľný tromi (2. podmienka nie je splnená),
- 98 652: súčet $9+8+5+2=24$ je deliteľný tromi (2. podmienka splnená), ale 62 nie je deliteľné štyrmi (3. podmienka nie je splnená),
- 98 650: súčet $9+8+5+0=22$ nie je deliteľný tromi (2. podmienka nie je splnená),
- 98 604: súčet $9+8+0+4=21$ je deliteľný tromi (2. podmienka je splnená) a 64 je deliteľné štyrmi (3. podmienka je taktiež splnená).

Číslo 98 604 je teda najväčšie číslo, ktoré môže mať Martin napísané na papieri.

---

2. *Karol sa snažil do prázdnych políčok na obr. 1 vpísať prirodzené čísla od* 1 *do* 14 *tak, aby žiadne číslo nebolo použité viackrát a súčet všetkých čísel na každej priamej línii bol rovnaký. Po chvíli si uvedomil, že to nie je možné. Ako by ste Karolovo pozorovanie zdôvodnili vy? (Pod priamou líniou rozumieme skupinu všetkých susediacich políčok, ktorých stredy ležia na jednej priamke.)* (S. Bednářová)

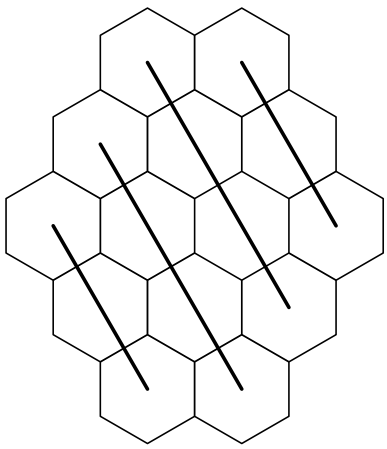


Obr. 1

Riešenie. Súčet všetkých čísel, ktoré máme do obrázka napísať, je

$$1 + 2 + \cdots + 13 + 14 = 7 \cdot 15 = 105.$$

Priamky na obr. 2 určujú štyri priame línie tak, že každé políčko patrí do práve jednej línie. Súčet všetkých čísel na každej línii by mal byť rovnaký a štvornásobok takého súčtu má byť 105. Číslo 105 ale nie je deliteľné štyrmi, čo znamená, že vpísať čísla do políčok požadovaným spôsobom naozaj nejde.



Obr. 2

Iné riešenie. Predpokladajme, že súčet všetkých čísel na každej priamej línii je rovnaký a označme ho p. Na obr. 1 môžeme pomocou piatich vodorovných priamok určiť päť priamych línii tak, že každé políčko bude patriť práve jednej línii. Z toho vidíme, že súčet všetkých doplnených čísel je $5p$. Na obr. 2 je iné rozdelenie na priame línie, podľa neho súčet všetkých doplnených čísel je $4p$. To je však spor ($5p \neq 4p$), preto sa čísla požadovaným spôsobom do políčok vpísať nedajú.

3. *Cena encyklopédie „Hádanky, rébusy a hlavolamy“ bola znížená o 62,5 %. Matej zistil, že obe ceny (pred znížením aj po ňom) sú dvojciferné čísla a dajú sa vyjadriť rovnakými ciframi, len v rôznom poradí. O koľko € bola encyklopédia zlacnená?* (M. Volfová)

Riešenie. Pôvodnú cenu knihy v € napíšme v tvare $10a + b$, pričom a a b sú neznáme nenulové cifry. Po zľave bola cena knihy $10b+a$. Zníženie bolo o 62,5 %, teda na 37,5 %, čo znamená, že

$$\frac{37{,}5}{100} \cdot (10a + b) = 10b + a.$$

Využijúc rovnosť $37{,}5/100 = 75/200 = 3/8$ predchádzajúci vzťah upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \cdot (10a + b) &= 10b + a, \\ 30a + 3b &= 80b + 8a, \\ 22a &= 77b, \\ 2a &= 7b. \end{aligned}$$

Jediné jednociferné prirodzené čísla spĺňajúce túto rovnosť sú $a = 7$ a $b = 2$. Pôvodná cena encyklopédie bola 72 €, po zľave 27 €, encyklopédia bola zľavnená o 45 €.

---

4. *Rozdeľte kocku s hranou 8 cm na menšie zhodné kocôčky tak, aby súčet ich povrchov bol päťkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky. Aký bude objem malej kocôčky a koľko centimetrov bude merať jej hrana?* (M. Volfová)

Riešenie. Ak x (v cm) označuje dĺžku hrany malej kocôčky, bude jej povrch $6x^2$. Na každej hrane danej kocky bude $8/x$ malých kocôčok, celá kocka tak bude rozdelená na

$$\frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x} = \frac{8 \cdot 64}{x^3}$$

kocôčok. Povrch všetkých kocôčok bude

$$\frac{8 \cdot 64}{x^3} \cdot 6x^2 = \frac{6 \cdot 8 \cdot 64}{x}$$

a má byť päťkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky, ktorý je $6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64$. Preto musí platiť

$$\frac{6 \cdot 8 \cdot 64}{x} = 5 \cdot 6 \cdot 64,$$

odkiaľ po úprave dostávame $x = \frac{8}{5} = 1{,}6$. Hrana malej kocôčky bude merať 1,6 cm a jej objem bude $1{,}6^3 \doteq 4{,}1\,(\mathrm{cm}^3)$.

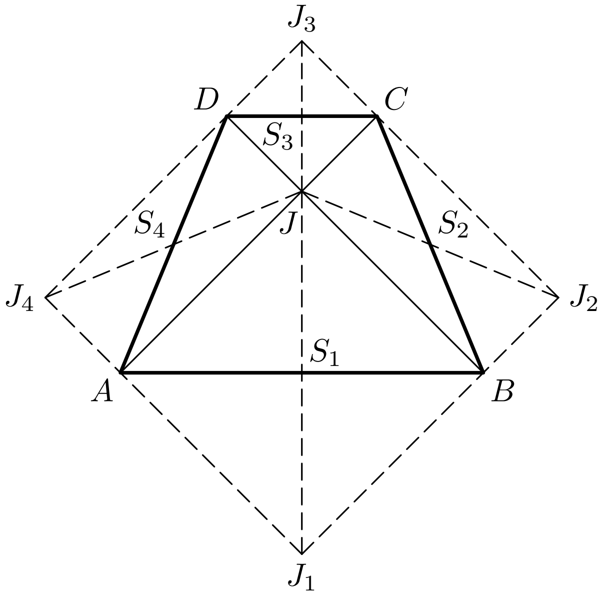
5. *Klára, Lenka a Matej si precvičovali písomné delenie so zvyškom. Ako delenca mal každý zadané iné prirodzené číslo, ako deliteľa však mali všetci rovnaké prirodzené číslo. Lenkin delenec bol o* 30 *väčší ako Klárin. Matejov delenec bol o* 50 *väčší ako Lenkin. Kláre vyšiel vo výsledku zvyšok* 8*, Lenke zvyšok* 2 *a Matejovi zvyšok* 4*. Všetci počítali bez chyby. Aký deliteľ mali žiaci zadaný?* (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Hľadaný deliteľ označíme x a Klárin delenec označíme k. Lenkin delenec je potom $k + 30$ a Matejov je $k + 80$. Keď vydelíme číslo k číslom x, dostaneme podľa zadania zvyšok 8. Číslo $k - 8$ teda musí byť deliteľné číslom x bezo zvyšku. V zadaní sa ďalej uvádza, že $k + 30$ dáva po delení číslom x zvyšok 2 a $k + 80$ dáva po delení tým istým x zvyšok 4. Preto $k + 28$ a $k + 76$ musia byť bezo zvyšku deliteľné číslom x.

Ukázali sme, že čísla $k - 8$ a $k + 28$ sú bezo zvyšku deliteľné číslom x. Je zrejmé, že aj ich rozdiel 36 musí byť bezo zvyšku deliteľný číslom x. Takisto rozdiel čísel $k + 28$ a $k + 76$, ktorý je rovný 48, musí byť bezo zvyšku deliteľný číslom x. Ako x teda pripadajú do úvahy len spoločné delitele čísel 36 a 48, čo sú čísla 1, 2, 3, 4, 6 a 12. Číslo x musí zároveň byť väčšie ako 8, inak by Klára nemohla dostať po delení týmto číslom zvyšok 8. Hľadaný deliteľ x tak musí byť 12.

6. *V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ sú uhlopriečky AC a DB na seba kolmé, ich dĺžka je* 8 cm *a dĺžka najdlhšej strany AB je tiež* 8 cm*. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka.* (*M. Krejčová*)

Riešenie. Priesečník uhlopriečok lichobežníka označíme J a stredy jeho strán označíme S_1, S_2, S_3 a S_4, poz. obr. 3.

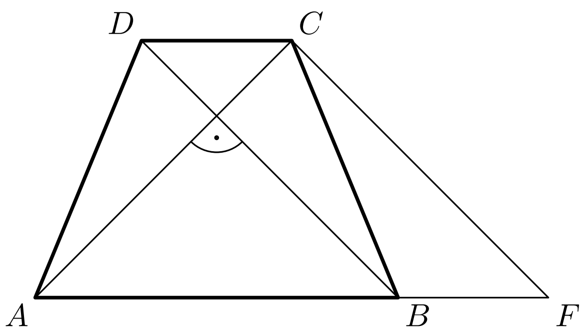


Obr. 3

V stredovej súmernosti so stredom S_1 zobrazíme bod J na bod J_1. Podobne určíme aj body J_2, J_3 a J_4. Uhlopriečky štvoruholníkov J_1BJA, J_2CJB, J_3DJC a J_4AJD sa rozpoľujú a podľa zadania platí $|\measuredangle BJA| = |\measuredangle CJB| = |\measuredangle DJC| = |\measuredangle AJD| = 90°$, preto tieto štvoruholníky musia byť obdĺžniky alebo štvorce. Z toho vyplýva, že spojením bodov A, J_1, B, J_2, C, J_3, D, J_4 a A vyznačíme štvorec $J_1J_2J_3J_4$ so stranou dĺžky

8 cm. Jeho obsah je $8 \cdot 8 = 64\,(\mathrm{cm}^2)$ a obsah lichobežníka $ABCD$ je zjavne polovičný, teda $32\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Bodom C veďme rovnobežku s uhlopriečkou BD a jej priesečník s priamkou AB označme F (obr. 4).

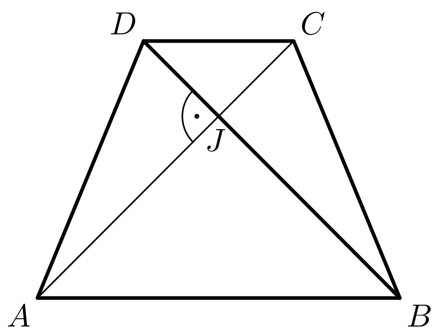


Obr. 4

Trojuholníky ACD a CFB sú zhodné podľa vety *sss*, preto obsah lichobežníka $ABCD$ je rovnaký ako obsah trojuholníka AFC. Z konštrukcie vyplýva, že tento trojuholník je rovnoramenný ($|AC| = |FC| = 8\,\mathrm{cm}$) a pravouhlý (s pravým uhlom vo vrchole C). Jeho obsah je teda $\frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32\,(\mathrm{cm}^2)$.

Poznámka. Všimnime si, že sme v predchádzajúcich dvoch riešeniach nepotrebovali dĺžku základne AB; obsah lichobežníka $ABCD$ je teda od tejto veličiny nezávislý.

Iné riešenie. Priesečník uhlopriečok označíme J, poz. obr. 5. Určíme obsahy trojuholníkov ABD a CDB a sčítaním potom dostaneme obsah lichobežníka $ABCD$.



Obr. 5

V oboch trojuholníkoch poznáme jednu stranu, a síce BD. Zo zadania vieme, že úsečky BD a AC sú na sebe kolmé. Preto úsečky JA a JC sú výšky zmienených trojuholníkov kolmé na stranu BD. Vypočítajme veľkosti týchto výšok. Z osovej súmernosti celého útvaru vyplýva, že $|AJ| = |BJ|$. Túto veľkosť označíme x a určíme ju podľa Pytagorovej vety v trojuholníku AJB:

$$\begin{aligned} |AJ|^2 + |BJ|^2 &= |AB|^2, \\ x^2 + x^2 &= 8^2, \\ x &= \sqrt{32}\,(\mathrm{cm}). \end{aligned}$$

Teda $|AJ| = \sqrt{32}\,\mathrm{cm}$, a keďže $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$, platí $|JC| = (8-\sqrt{32})\,\mathrm{cm}$. Teraz už môžeme spočítať obsahy trojuholníkov ABD a CDB, respektíve obsah lichobežníka $ABCD$:

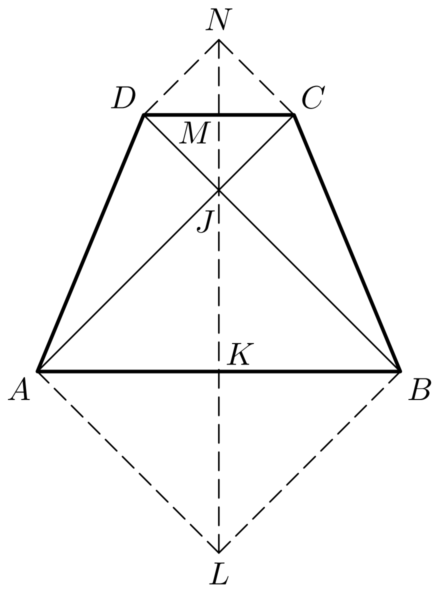
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CDB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{32} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8 - \sqrt{32}).$$

Výraz sa dá výhodne upraviť:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (\sqrt{32} + 8 - \sqrt{32}) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Pokiaľ žiaci budú priebežne počítať medzivýsledky, dostanú tieto hodnoty: $|AJ| \doteq 5{,}66\,\mathrm{cm}$, $|JC| \doteq 2{,}34\,\mathrm{cm}$, $S_{ABD} \doteq 22{,}64\,\mathrm{cm}^2$, $S_{CDB} \doteq 9{,}36\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Priesečník uhlopriečok nazveme opäť J. Stredy základní AB a CD označíme postupne K a M.



Obr. 6

Obsah lichobežníka $ABCD$ budeme počítať podľa známeho vzorca

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |KM|.$$

Vieme, že $|\measuredangle AJB| = 90^\circ$, a z osovej súmernosti rovnoramenného lichobežníka vyplýva, že $|AJ| = |BJ|$. Trojuholník ABJ sa dá preto doplniť na štvorec $ALBJ$: v osovej súmernosti podľa osi AB zobrazíme bod J na bod L (obr. 6). Podobne vytvoríme aj štvorec $DJCN$. Všeobecne platí, že štvorec so stranou a má uhlopriečku dĺžky $a\sqrt{2}$. Súčet dĺžok strany AJ štvorca $ALBJ$ a strany JC štvorca $DJCN$ je $8\,\mathrm{cm}$. Súčet dĺžok ich uhlopriečok JL a NJ je $8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, teda

$$|NL| = 8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Podľa obr. 6 postupne určíme

$$
\begin{aligned}
|KM| &= \frac{1}{2}|NL| = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm},\\
|JL| &= |AB| = 8\,\mathrm{cm},\\
|DC| &= |JN| = |NL| - |JL| = 8\sqrt{2} - 8\,(\mathrm{cm}).
\end{aligned}
$$

Zistené dĺžky dosadíme do vyššie uvedeného vzorca:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(8 + 8\sqrt{2} - 8)\cdot 4\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 32\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Ak žiaci budú počítať priebežné medzivýsledky, dostanú tieto hodnoty: $|KM| \doteq 5{,}66\,\mathrm{cm}$, $|DC| \doteq 3{,}31\,\mathrm{cm}$.