2020/2021
70. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 23. – 29. 8. 2021.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nájdite všetky reálne čísla A také, že každá postupnosť nenulových reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots$ spĺňajúca

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

pre každé celé číslo $n \geqq 1$ obsahuje iba konečne veľa záporných členov. (*Česká rep.*)

I-2. Dané sú kladné celé čísla m a n. Niektoré štvorčeky tabuľky $m \times n$ sú zafarbené načerveno. Postupnosť $2r \geqq 4$ po dvoch rôznych červených štvorčekov $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ nazývame *strelecký cyklus*, ak pre každé $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ ležia štvorčeky a_k a a_{k+1} na diagonále, ale štvorčeky a_k a a_{k+2} neležia na diagonále (pritom $a_{2r+1} = a_1$ a $a_{2r+2} = a_2$). V závislosti od m a n určte najväčší možný počet červených štvorčekov v tabuľke $m \times n$, v ktorej sa nachádza strelecký cyklus.
(*Poznámka.* Dva štvorčeky ležia na diagonále, ak priamka prechádzajúca ich stredmi zviera so stranami tabuľky uhol 45°.) (*Jozef Rajník, Slovensko*)

I-3. Vo vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC je daný bod D. Body E a F ležia v polrovine určenej priamkou BC obsahujúcej bod A tak, že priamka DE je kolmá na priamku BE a priamka DE sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku ACD, zatiaľ čo priamka DF je kolmá na priamku CF a priamka DF sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku ABD. Dokážte, že body A, D, E a F ležia na jednej kružnici.
(*Patrik Bak, Slovensko*)

I-4. Je dané celé číslo $n \geqq 3$. Veverička Zagi sedí vo vrchole pravidelného n-uholníka. Zagi plánuje výlet pozostávajúci z $n-1$ skokov takých, že v i-tom skoku skočí o i hrán v smere hodinových ručičiek, kde $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dokážte, že ak Zagi po $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skokoch navštívil $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ rôznych vrcholov, tak po $n-1$ skokoch navštívi všetky vrcholy.
(*Česká rep.*)

Súťaž družstiev:

T-1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že nerovnosť

$$f(x^2) - f(y^2) \leqq (f(x) + y)(x - f(y))$$

je splnená pre všetky reálne čísla x a y. ()

T-2. Pre kladné celé číslo n povieme, že polynóm $P(x)$ s reálnymi koeficientmi je n-*krásny*, ak má rovnica $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ presne n reálnych riešení. Ukážte, že pre každé kladné celé číslo n

a) existuje n-krásny polynóm;
b) každý n-krásny polynóm má stupeň aspoň $(2n+1)/3$.

()

T-3. Dané sú kladné celé čísla n, b a c. Skupina n pirátov si chce férovo rozdeliť poklad. Poklad pozostáva z $c \cdot n$ rovnakých mincí rozmiestnených v $b \cdot n$ vreciach, z ktorých je aspoň $n - 1$ na začiatku prázdnych. Kapitán Jack si prezrie obsah jednotlivých vriec a spraví postupnosť ťahov. V každom ťahu môže premiestniť ľubovoľný počet mincí z niektorého vreca do jedného prázdneho vreca. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sú mince na začiatku rozmiestnené, môže Jack spraviť nanajvýš $n-1$ ťahov tak, že potom môže rozdeliť vrecia medzi pirátov tak, aby každý pirát dostal b vriec a c mincí.

(*Josef Tkadlec, Česká rep.*)

T-4. Dané je prirodzené číslo n. Dokážte, že v pravidelnom $6n$-uholníku môžeme nakresliť $3n$ uhlopriečok takých, že ich koncové body sú všetky po dvoch rôzne, a rozdeliť nakreslené uhlopriečky do n trojíc tak, že:

- uhlopriečky v každej trojici sa pretínajú v jednom vnútornom bode $6n$-uholníka a
- všetkých týchto n priesečníkov je rôznych.

()

T-5. Nech AD je priemer kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Rovnobežky so stranami AB a AC prechádzajúce bodom D pretínajú priamky AC a AB postupne v bodoch E a F. Priamky EF a BC sa pretínajú v bode G. Dokážte, že priamky AD a DG sú navzájom kolmé. ()

T-6. Nech M je stred strany BC trojuholníka ABC. Bod X je zvolený na polpriamke AB tak, že platí $2|\measuredangle CXA| = |\measuredangle CMA|$. Bod Y je zvolený na polpriamke AC tak, že platí $2|\measuredangle AYB| = |\measuredangle AMB|$. Priamka BC pretína kružnicu opísanú trojuholníku AXY v bodoch P a Q tak, že body P, B, C a Q ležia v tomto poradí na priamke BC. Dokážte, že $|PB| = |QC|$. ()

T-7. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (n, p) také, že p je prvočíslo a

$$1 + 2 + \ldots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + p^2).$$

()

T-8. Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n takých, že n^2 napísané v sústave so základom 4 obsahuje iba cifry 1 a 2. (*Martin Melicher, Slovensko*)