2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

1. *Súčin cifier ľubovoľného viacciferného čísla je vždy menší ako toto číslo. Ak počítame súčin cifier daného čísla, potom súčin cifier tohto súčinu, potom znova súčin cifier nového súčinu atď., nutne po nejakom počte krokov dospejeme k jednocifernému číslu. Tento počet krokov nazývame perzistencia čísla. Napr. číslo* 723 *má perzistenciu* 2*, lebo* $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ *(1. krok) a* $4 \cdot 2 = 8$ *(2. krok).*

- *Nájdite najväčšie nepárne číslo, ktoré má navzájom rôzne cifry a perzistenciu* 1*.*
- *Nájdite najväčšie párne číslo, ktoré má navzájom rôzne nenulové cifry a perzistenciu* 1*.*
- *Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má perzistenciu* 3*.* (S. Bednářová)

Riešenie. 1. V zadaní nie je povedané, že v tomto prípade nesmieme použiť nulu. Ak je jedna z cifier nulová, znamená to, že súčin v prvom kroku je takisto nula a teda perzistencia je 1. Stačí preto zostaviť najväčšie nepárne číslo s navzájom rôznymi ciframi; je ním číslo 9 876 543 201.

2. Teraz nulu použiť nemôžeme. Znamená to, že ciferný súčin hľadaného čísla musí byť číslo jednociferné, pričom sa snažíme získať čo najväčší počet navzájom rôznych činiteľov (počet činiteľov určuje počet cifier tohto čísla, teda čím viac činiteľov, tým väčšie číslo). Uvažujme teda všetky možné rozklady jednociferných čísel na súčiny prirodzených čísel.

Keďže hľadáme párne číslo, potrebujeme, aby aspoň jeden činiteľ ciferného súčinu bol párny. To znamená, že ciferný súčin je takisto párne číslo, takže sa pri rozklade stačí obmedziť na čísla 2, 4, 6 a 8. Ďalej sa môžeme zamerať iba na také rozklady, ktoré majú číslo 1 ako činiteľa. Prislúchajúce celé čísla sú vtedy vždy o jeden rád väčšie ako čísla, ktoré prislúchajú rozkladom bez 1.

- $2 = 1 \cdot 2$, možnosti: 12,
- $4 = 1 \cdot 4$, možnosti: 14,
- $4 = 1 \cdot 2 \cdot 2$, vylúčime, lebo sú tam rovnaké činitele,
- $6 = 1 \cdot 6$, možnosti: 16,
- $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, možnosti: 132, 312,
- $8 = 1 \cdot 8$, možnosti: 18,
- $8 = 1 \cdot 2 \cdot 4$, možnosti: 124, 142, 214, 412,
- $8 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, vylúčime, lebo sú tam rovnaké činitele.

Z nájdených možností je najväčšie číslo 412.

3. Túto úlohu môžeme riešiť tak, že prechádzame postupne viacciferné čísla počnúc najmenším z nich (t. j. 10) a zisťujeme ich perzistenciu. Prvé nájdené číslo s perzistenciou 3 je hľadané číslo.

Dvojciferné čísla obsahujúce cifru 1 alebo 0 majú perzistenciu 1, pretože príslušný ciferný súčin je nanajvýš 9. Podobne, dvojciferné čísla, ktoré obsahujú cifru 2, majú perzistenciu nanajvýš 2, pretože príslušný ciferný súčin je nanajvýš 18. Na základe týchto úvah stačí začať preverovať čísla až od 33:

- 33, $3 \cdot 3 = 9$, perzistencia 1,
- 34, $3 \cdot 4 = 12$, $1 \cdot 2 = 2$, perzistencia 2,

- 35, $3 \cdot 5 = 15$, $1 \cdot 5 = 5$, perzistencia 2,
- 36, $3 \cdot 6 = 18$, $1 \cdot 8 = 8$, perzistencia 2,
- 37, $3 \cdot 7 = 21$, $2 \cdot 1 = 2$, perzistencia 2,
- 38, $3 \cdot 8 = 24$, $2 \cdot 4 = 8$, perzistencia 2,
- 39, $3 \cdot 9 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$, perzistencia 3.

  Najmenšie prirodzené číslo s perzistenciou 3 je 39.

---

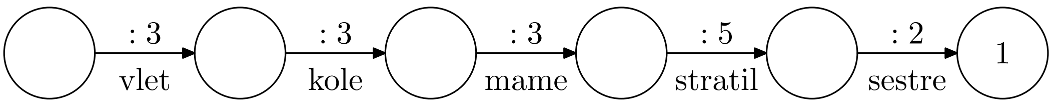
2. *Ondro na výlete utratil $\frac{2}{3}$ peňazí a zo zvyšku dal ešte $\frac{2}{3}$ na školu pre deti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zvyšku kúpil malý darček pre mamičku. Z deravého vrecka stratil $\frac{4}{5}$ zvyšných peňazí, a keď zo zvyšných dal polovicu malej sestričke, ostalo mu práve jedno euro. S akou sumou išiel Ondro na výlet?* (M. Volfová)

Riešenie. Počet Ondrových peňazí pred výletom označíme x.

- Ondro na výlete utratil $\frac{2}{3}$ peňazí, zostalo mu teda $\frac{1}{3}x$ peňazí.
- Na školu v Tibete dal $\frac{2}{3}$ zvyšku, potom mu ostalo $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x$ peňazí.
- Darček mamine stál $\frac{2}{3}$ zo zvyšku, teda po jeho kúpe Ondrovi ostala $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}x = \frac{1}{27}x$ peňazí.
- Z toho stratil $\frac{4}{5}$, čiže mu ostalo $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{27}x = \frac{1}{135}x$ peňazí.
- Polovicu zvyšku dal sestre a jemu ostala druhá polovica, t. j. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{135}x = \frac{1}{270}x$, a to bolo 1 €.

  Ak $\frac{1}{270}x = 1$, tak $x = 270$. Ondrej išiel na výlet so sumou 270 €.

Iné riešenie. Úlohu je možné riešiť takisto odzadu podľa schémy na obr. 1.



Obr. 1

Postupne, sprava doľava, dostávame nasledujúce hodnoty: $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 5 = 10$, $10 \cdot 3 = 30$, $30 \cdot 3 = 90$ a $90 \cdot 3 = 270$. Ondro mal pred výletom 270 €.

---

3. *Silvia prehlásila:*

„Sme tri sestry, ja som najmladšia, Lívia je staršia o tri roky a Edita o osem. Naša mamka rada počuje, že všetky (aj s ňou) máme v priemere 21 rokov. Pritom keď som sa narodila, mala mamka už 29.“

Pred koľkými rokmi sa Silvia narodila? (M. Volfová)

Riešenie. Ak vek Silvie v rokoch označíme x, tak Lívia má $x+3$, Edita $x+8$ a mamka $x+29$ rokov. Vekový priemer všetkých je 21 rokov, takže

$$(x + (x+3) + (x+8) + (x+29)) : 4 = 21,$$

po úprave

$$\begin{aligned} 4x + 40 &= 84, \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Teda Silvia sa narodila pred 11-timi rokmi.

4. *Juro mal napísané štvorciferné číslo. Toto číslo zaokrúhlil na desiatky, na stovky a na tisícky a všetky tri výsledky zapísal pod pôvodné číslo. Všetky štyri čísla správne sčítal a dostal* 5 443. *Ktoré číslo mal Juro napísané?* (M. Petrová)

Riešenie. Celé zadanie napíšeme ako sčítanie štyroch čísel. Zároveň napíšeme nuly na tie miesta, kde musia byť po zaokrúhlení daného čísla. Na ostatné miesta napíšeme hviezdičky, ktoré budeme postupne dopĺňať.

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,* \\ *\,*\,*\,0 \\ *\,*\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Najskôr si všimnime posledný stĺpec, v ktorom je jediná neznáma cifra. Na miesto príslušnej hviezdičky môžeme doplniť jedine cifru 3, takže neznáme číslo má na mieste jednotiek cifru 3.

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,3 \\ *\,*\,*\,0 \\ *\,*\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Tretí stĺpec: Je zrejmé, že pri zaokrúhľovaní na desiatky sa cifra 3 zaokrúhľuje nadol. Preto na mieste desiatok prvého a druhého čísla musí byť rovnaká cifra. Keďže sčítanie na mieste jednotiek nebolo cez desiatku, hľadáme číslo, ktorého dvojnásobok má na mieste jednotiek cifru 4. Na mieste desiatok môže byť buď a) cifra 2, alebo b) cifra 7.

a) Doplníme cifru 2: Posledné dvojčíslie hľadaného čísla je 23.

$$\begin{array}{r} *\,*\,2\,3 \\ *\,*\,2\,0 \\ *\,*\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Druhý stĺpec: Aj pri zaokrúhľovaní na stovky zaokrúhľujeme nadol, takže na mieste stoviek prvého, druhého a tretieho čísla je rovnaká cifra. Keďže sčítanie desiatok nebolo cez desiatku, opäť nič nepripočítavame. Hľadáme teda číslo, ktorého trojnásobok končí cifrou 4. Tomu vyhovuje iba cifra 8, takže posledné trojčíslie hľadaného čísla je 823.

$$\begin{array}{r} *\,8\,2\,3 \\ *\,8\,2\,0 \\ *\,8\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Prvý stĺpec: Keďže $8+8+8 = 24$, pripočítame 2. Zároveň hľadané číslo zaokrúhľujeme na tisíce nahor, takže cifra na mieste tisícok v poslednom čísle je o 1 väčšia ako zostávajúce tri. To znamená, že štvornásobok cifry na mieste tisícov je $5-2-1=2$. To sa samozrejme nedá splniť, takže táto možnosť nevyhovuje, teda cifra 2 nemôže byť na mieste desiatok.

b) Doplníme cifru 7: Posledné dvojčíslie hľadaného čísla je 73.

$$\begin{array}{r} *\,*\,7\,3 \\ *\,*\,7\,0 \\ *\,*\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Druhý stĺpec: Keďže $7+7=14$, pripočítavame 1 z predchádzajúceho súčtu. Zároveň hľadané číslo zaokrúhľujeme na stovky nahor, takže cifra na mieste stoviek pri treťom čísle je o 1 väčšia ako zostávajúce dve (resp. môžu byť prvé dve 9 a tretia 0). To znamená, že trojnásobok cifry na mieste stoviek končí na cifru $4-1-1=2$. Tomu vyhovuje len cifra 4. Hľadané číslo končí na trojčíslie 473.

$$\begin{array}{r} *\,4\,7\,3 \\ *\,4\,7\,0 \\ *\,5\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

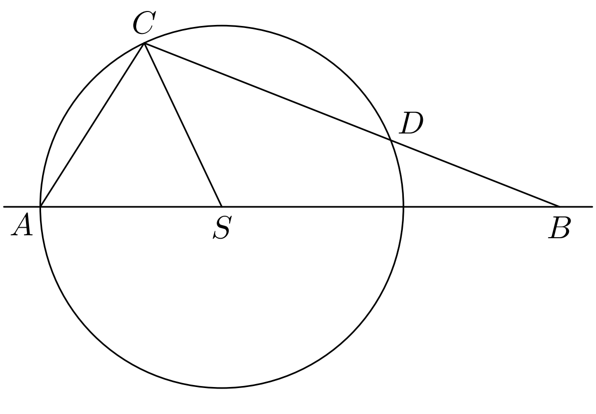
Prvý stĺpec: Hľadané číslo sa zaokrúhľuje na tisíce nadol, takže všetky štyri chýbajúce cifry sú rovnaké. Zmysel má doplniť na miesto tisícok len cifru 1. Ľahko overíme, že po takomto doplnení je písomné sčítanie správne.

$$\begin{array}{r} 1\,4\,7\,3 \\ 1\,4\,7\,0 \\ 1\,5\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Jediným riešením je číslo 1 473, takže Juro mal napísané číslo 1 473.

---

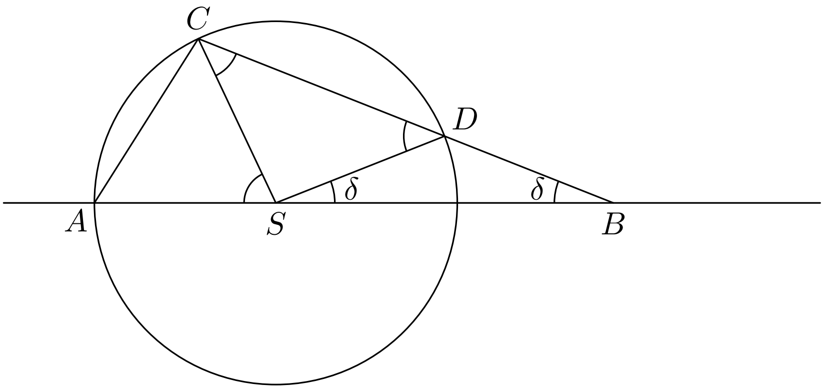
5. *Laco narysoval kružnicu so stredom S a body A, B, C, D, ako ukazuje obr. 2. Zistil, že úsečky SC a BD sú rovnako dlhé. V akom pomere sú veľkosti uhlov ASC a SCD?*



Obr. 2

(*L. Hozová*)

Riešenie. Zo zadania vieme, že $|SC| = |BD|$, navyše $|SC| = |SD|$, pretože je to veľkosť polomeru kružnice. Trojuholníky CSD a BDS sú teda rovnoramenné. Označme $|\measuredangle DSB| = |\measuredangle DBS| = \delta$ (obr. 3).



Obr. 3

Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku BDS je $180°$, z čoho máme

$$\delta + \delta + |\measuredangle BDS| = 180°,$$

a keďže uhol BDC je priamy, platí

$$|\measuredangle SDC| + |\measuredangle BDS| = 180°.$$

Z uvedených dvoch rovníc je zrejmé, že $|\measuredangle SDC| = 2\delta$. Keďže trojuholník CSD je rovnoramenný, je aj $|\measuredangle SCD| = 2\delta$. Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku CSD je $180°$ a uhol BSA je priamy, preto dostávame

$$2\delta + 2\delta + |\measuredangle CSD| = 180°,$$
$$|\measuredangle ASC| + |\measuredangle CSD| + \delta = 180°.$$

Odtiaľ vyplýva, že $|\measuredangle ASC| = 3\delta$. Úlohou je zistiť pomer $|\measuredangle ASC| : |\measuredangle SCD|$. Po dosadení dostaneme $3\delta : 2\delta$, čiže $3 : 2$.

---

6. *Nájdite všetky trojciferné prirodzené čísla, ktoré sú bezo zvyšku deliteľné číslom* 6 *a v ktorých môžeme vyškrtnúť ktorúkoľvek cifru a vždy dostaneme dvojciferné prirodzené číslo, ktoré je tiež bezo zvyšku deliteľné číslom* 6. (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Cifry hľadaného čísla označíme takto: x je na mieste stoviek, y na mieste desiatok a z na mieste jednotiek. Prirodzené číslo je deliteľné šiestimi práve vtedy, keď je súčet jeho cifier rovný násobku čísla 3 a cifra na mieste jednotiek je párna.

Najskôr uvažujme len o prvej časti tejto podmienky. Podľa nej musí byť súčet $x + y + z$ deliteľný tromi. Po vyškrtnutí cifry z dostaneme dvojciferné číslo, ktoré má byť tiež násobkom šiestich. Toto číslo má súčet cifier $x + y$ a ten musí byť tiež deliteľný tromi. Vyškrtnutá cifra z tak mohla byť jedine 0, 3, 6 alebo 9. Podobnou úvahou sa dá dôjsť na to, že takisto cifry x a y môžu byť jedine 0, 3, 6 alebo 9.

Teraz uvažujme o druhej podmienke deliteľnosti šiestimi. Pôvodné číslo a dvojciferné čísla, ktoré z neho získame vyškrtnutím jednej cifry, majú na mieste jednotiek buď z alebo y. Cifry z a y teda musia byť párne. Podľa zadania dostaneme po vyškrtnutí akejkoľvek cifry prirodzené číslo. Toto číslo môže začínať cifrou x alebo y, tieto cifry preto nemôžu byť nulové.

Keď zhrnieme všetko vyššie uvedené, tak zistíme, že x môže byť 3, 6 alebo 9, y musí byť 6, z môže byť 0 alebo 6. Všetky hľadané čísla sú teda 360, 366, 660, 666, 960 a 966.