

2020/2021

70. ročník Matematickej olympiády

Zadania úloh IMO

(Súťaž sa konala 18. – 23. 7. 2021.)

1. Je dané celé číslo $n > 100$. Ivan napísal každé z čísel $n, n + 1, \dots, 2n$ na jednu kartičku. Potom týchto $n + 1$ kariet zamiešal a rozdelil na dve kôpky. Dokážte, že aspoň jedna z týchto kôpok obsahuje dve kartičky, ktorých súčet čísel je druhá mocnina celého čísla. (Austrália)

2. Dokážte, že nerovnosť

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

platí pre všetky reálne čísla x_1, \dots, x_n .

(Kanada)

3. Nech D je vnútorný bod ostrouhlého trojuholníka ABC spĺňajúceho $|AB| > |AC|$ taký, že $|\angle DAB| = |\angle CAD|$. Bod E leží na úsečke AC a spĺňa $|\angle ADE| = |\angle BCD|$. Bod F leží na úsečke AB a spĺňa $|\angle FDA| = |\angle DBC|$. Bod X leží na priamke AC a spĺňa $|CX| = |BX|$. Nech O_1 a O_2 sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom ADC a EXD . Dokážte, že priamky BC , EF , O_1O_2 sa pretínajú v jednom bode. (Ukrajina)

4. Nech Γ je kružnica so stredom I a nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že každá z úsečiek AB , BC , CD a DA sa dotýka Γ . Nech Ω je kružnica opísaná trojuholníku AIC . Časť polpriamky BA za bodom A pretína Ω v X a časť polpriamky BC za bodom C pretína Ω v Z . Časti polpriamok AD a CD za bodom D pretínajú Ω postupne v bodoch Y a T . Dokážte, že

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

(Poľsko)

5. Dve veвериčky, Chip a Dale, nazbierali 2021 orieškov na zimu. Dale očísloval oriešky číslami od 1 do 2021 a vykopal 2021 dierok do kruhu v zemi okolo ich obľúbeného stromu. Ďalšie ráno si Dale všimol, že Chip umiestnil do každej dierky jeden orech nedbajúc na číslovanie. Nešťastný Dale sa rozhodol oriešky preusporiadať postupnosťou 2021 krokov. V k -tom kroku Dale vymení pozície orechov susedných s orechom k . Dokážte, že existuje taká hodnota k , že v k -tom kroku Dale vymení orechy a a b také, že $a < k < b$. (Španielsko)

6. Nech $m > 2$ je dané celé číslo, A je daná konečná množina (nie nutne kladných) celých čísel a $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ sú podmnožiny A . Predpokladajme, že pre každé $k = 1, 2, \dots, m$ je súčet prvkov množiny B_k rovný m_k . Dokážte, že A obsahuje aspoň $m/2$ prvkov. (Rakúsko)