

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

## Riešenia úloh školského kola kategórie A

- 1 Nájďte najväčšie celé číslo  $d$ , pre ktoré možno tabuľku  $43 \times 47$  vyplniť jednotkami a dvojkami tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol deliteľný číslom  $d$ . (Dokážte tiež, že žiadne väčšie číslo  $d$  zadaniu úlohy nevyhovuje.)

(Tomáš Bárta)

### Riešenie:

V prvej časti riešenia dokážeme, že v prípade  $d = 47$  požadované vyplnenie tabuľky existuje: Zapišme do každého riadku všetkých 47 čísel rovnakých, a to do 39 riadkov jednotky a do zvyšných 4 riadkov dvojky:

	1	1	1	1	1	...	1
39	:	:	:	:	:		:
	1	1	1	1	1	...	1
	2	2	2	2	2	...	2
4	2	2	2	2	2	...	2
	2	2	2	2	2	...	2
	47						

Potom súčet čísel v každom riadku je 47 alebo  $2 \cdot 47$  a súčet čísel v každom stĺpci je  $39 \cdot 1 + 4 \cdot 2$  čiže 47, čo sú všetko násobky čísla 47.

V druhej časti riešenia dokážeme sporom, že ak  $d > 47$ , tak požadované vyplnenie neexistuje. Pripusťme naopak, že tabuľku  $43 \times 47$  máme vyplnenú jednotkami a dvojkami tak, že pre nejaké také  $d$  je súčet čísel v každom riadku aj každom stĺpci násobkom čísla  $d$ . Keďže každý z týchto súčtov je kladný a nanajvýš rovný  $2 \cdot 47$ , a teda menší ako  $2d$ , musí byť tento násobok čísla  $d$  rovný priamo číslu  $d$ . Sčítaním všetkých čísel tabuľky po riadkoch tak dôjdeme k hodnote  $43d$ , zatiaľ čo pri sčítaní po stĺpcoch dostaneme hodnotu  $47d$ . Musí teda platiť  $43d = 47d$ , čo je hľadaný spor.

### Poznámka:

Podané riešenie možno zrejším spôsobom zovšeobecniť na dôkaz výsledku, že pre každú tabuľku  $m \times n$ , pričom  $m < n \leq 2m$ , je najväčšie vyhovujúce  $d$  rovné číslu  $n$ .

### Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za dôkaz prvej časti (konštrukcia pre prípad  $d = 47$ ) a 4 body za dôkaz druhej časti (dôkaz nemožnosti pre každé  $d$  väčšie ako 47). Z prvej časti možno získať 1 bod za vyhovujúcu konštrukciu pre niektoré celé  $d$ ,  $1 < d < 47$ . Z druhej časti možno získať 1 bod za dôkaz nemožnosti pre každé  $d$  také, že  $d \geq 86$ . Za uhádnutie správneho  $d$  dajte 1 bod, ak nie je dosiahnutý žiadny z vyššie uvedených ziskov.

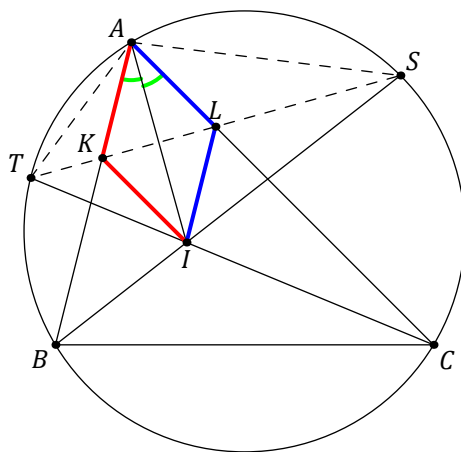
- 2 Označme  $I$  stred kružnice vpísanej do trojuholníka  $ABC$ . Priamky  $BI$ ,  $CI$  pretnú kružnicu opísanú trojuholníku  $ABC$  postupne v bodoch  $S$  a  $T$ , pričom  $S \neq B$  a  $T \neq C$ . Úsečka  $ST$  pretína strany  $AB$ ,  $AC$  v bodoch  $K$ ,  $L$ . Dokážte, že štvoruholník  $AKIL$  je kosoštvorec (prípadne štvorec).

(Josef Tkadlec)

### Riešenie 1:

Z návodnej úlohy N3 k 5. úlohe domáceho kola vieme, že priamka  $ST$  je osou úsečky  $AI$ . (Tento známy poznatok teda nemusia riešitelia dokazovať. Pripomeňme len, že vyplýva zo zhodnosti trojuholníkov  $ATS$  a  $ITS$  podľa vety *usu*: Majú totiž spoločnú stranu  $ST$  a uhly  $ATS$ ,  $ITS$  sú zhodné, rovnako ako uhly  $AST$ ,  $IST$  – ide totiž o obvodové uhly v kružnici opísanej  $ABC$  prislúchajúce zhodným oblúkom  $AS$ ,  $CS$ , resp. zhodným oblúkom  $AT$ ,  $BT$ .)

Platí preto  $|KA| = |KI|$  a  $|LA| = |LI|$ , ako je to vyznačené na obrázku.

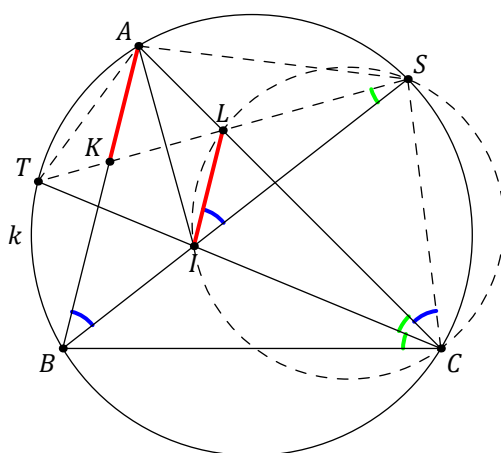


Štvoruholník  $AKIL$  je teda súmerný podľa svojej uhlopriečky  $KL$ . Keďže však jeho druhá uhlopriečka  $AI$  rozpolňuje uhol  $KAL$ , musí to byť kosoštvorec (prípadne jeho špeciálny prípad štvorec). (Tento zrejmy záver nemusia riešitelia dokazovať, napriek tomu jeho dôkaz uvedieme: Rovnoramenné trojuholníky  $AIK$  a  $AIL$  sú zhodné, lebo majú pri spoločnej základni  $AI$  zhodné vnútorné uhly  $KAI$  a  $LAI$ . Z toho vyplýva, že štvoruholník  $AKIL$  má zhodné všetky štyri strany.)

### Riešenie 2:

Dokážeme, že konvexný štvoruholník  $AKIL$  má protilahlé strany rovnobežné. Že je to nielen rovnobežník, ale dokonca kosoštvorec, potom ako v prvom riešení zrejme vyplynie z toho, že jeho uhlopriečka  $AI$  leží na osi jeho vnútorného uhla pri vrchole  $A$ . (Zo zhodnosti uhlov  $KAI$  a  $LAI$  potom totiž dostaneme, že sú s nimi zhodné aj striedavé uhly  $LIA$ , resp.  $KIA$ , takže oba trojuholníky  $AIK$  a  $AIL$  sú naozaj rovnoramenné so spoločnou základňou  $AI$ . Ani toto zrejme vysvetlenie nemusia riešitelia zapisovať.)

Z dvoch rovnobežností  $AK \parallel LI$  a  $AL \parallel KI$  dokážeme iba tú prvú v podobe  $AB \parallel LI$ ; druhá rovnobežnosť  $AL \parallel KI$  sa dokáže úplne analogicky. Postup založíme na vlastnostiach obvodových uhlov. V kružnici  $k$  opísanej trojuholníku  $ABC$  tak majú rovnakú veľkosť  $\frac{1}{2} |\sphericalangle ACB|$  nielen uhly  $ACT$  a  $TCB$ , ale aj uhol  $TSB$ .



Prvý a tretí z nich sú však uhly  $LCI$  a  $LSI$ , takže vďaka ich zhodnosti je štvoruholník  $LICS$  tetivový – jemu opísaná kružnica je na obrázku vykreslená. V nej je obvodový uhol  $LIS$  zhodný s uhlom  $LCS$ , čo je vlastne obvodový uhol  $ACS$  v kružnici  $k$ , ktorý je zhodný s uhlom  $ABS$ . Zistili sme tak, že úsečky  $LI$  a  $AB$  zvierajú s priamkou  $BS$  zhodné súhlasné uhly, a sú preto rovnobežné, ako sme potrebovali dokázať.

(Namiesto priamky  $BS$  sme mohli uvážiť aj priamku  $AC$ :  $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle ISC| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BAC|$ .)

### Poznámka:

Záverečným krokom oboch riešení boli úvahy o druhej uhlopriečke  $AI$  štvoruholníka  $AKIL$ . Tie možno nahradiť dôkazom rovnosti  $|KA| = |LA|$ , ktorý teraz uvedieme: Stačí ukázať, že sú zhodné uhly  $AKL$  a  $ALK$ , na ktoré sa pozrieme ako na vonkajšie uhly trojuholníkov  $AKT$ , resp.  $ALS$ . Pre ich vnútorné uhly však platí  $|\sphericalangle ATK| = |\sphericalangle ATS| = |\sphericalangle ABS| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ABC|$ ,  $|\sphericalangle TAK| = |\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle TCB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle BCA|$  a analogicky  $|\sphericalangle ASL| = \frac{1}{2} |\sphericalangle BCA|$  a  $|\sphericalangle SAL| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ABC|$ . Uhly  $AKL$  a  $ALK$  tak majú tú istú veľkosť  $\frac{1}{2} |\sphericalangle ABC| + \frac{1}{2} |\sphericalangle BCA|$ .

### Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V neúplných riešeniach dajte čiastkové body za nasledujúce poznatky (dokázané, ak sa na ne nevzťahuje posledný odsek pokynov):

- Uhlopriečka  $AI$  leží na osi uhla  $KAL$  – 0 bodov.
- Rovnosť  $|KA| = |LA|$  (zo záverečnej poznámky) – 2 body.
- Rovnosti  $|KA| = |KI|$  a  $|LA| = |LI|$  – za jedinú 3 body, za obe 4 body (aj pri konštatovaní, že štvoruholník  $AKIL$  je súmerný podľa svojej uhlopriečky  $KL$ ).
- Rovnobežnosti  $AK \parallel LI$  a  $AL \parallel KI$  – za jedinú 3 body, za obe 4 body.
- Štvoruholník  $LICS$  (prípadne  $LIBT$ , prípadne oba) je tetivový – 2 body.

Čiastočné zisky za tieto položky sa *nedajú* sčítať, t. j. počíta sa najväčší z nich.

V poznámkach v zátvorkách sme uviedli, ktoré poznatky možno prehlásiť za známe alebo zrejmé. Platí to aj pre ďalšie poznatky z riešenia návodných a dopĺňajúcich úloh k domácomu kolu, ak sa na ne riešiteľ odvolá.

3 Určte všetky dvojice kladných celých čísel  $a$  a  $b$ , pre ktoré platí  $a^{a-b} = b^a$ .

(Jaromír Šimša)

### Riešenie 1:

Po vynásobení zadanej rovnosti číslom  $a^b/b^a$  dostaneme  $(a/b)^a = a^b$ . Mocnina na ľavej strane je celočíselná práve vtedy, keď je jej základ  $a/b$  celé (v našom prípade kladné) číslo. (Toto zrejmé tvrdenie nemusia riešitelia dokazovať. Vyplyva z toho, že ak má zlomok  $a/b$  po skrátaní základný tvar  $u/v$ , je každá jeho mocnina  $(a/b)^n$  zlomkom so základným tvarom  $u^n/v^n$ .) Toto číslo označme  $k$ . Po dosadení  $a = kb$  sa zmení prepísaná rovnosť na tvar  $k^{kb} = (kb)^b$ , odkiaľ po vydelení exponentov číslom  $b$  dostaneme  $k^k = kb$  čiže  $b = k^{k-1}$ , t. j.  $a = kb = k^k$ . Všetky hľadané dvojice  $(a, b)$  sú preto tvaru  $(k^k, k^{k-1})$ , pričom  $k$  je ľubovoľné kladné celé číslo. Skúška vzhľadom na ekvivalentné úpravy nie je nutná.

### Poznámka:

Ukážeme, ako kľúčový poznatok o tom, že číslo  $a$  je násobkom čísla  $b$ , možno získať aj bez prepisu zadanej rovnosti na tvar so zlomkom  $a/b$ . Využijeme na to predpoklad, že čísla  $a$  a  $b$  sú základy sebe rovných mocnín  $a^{a-b}$  a  $b^a$ , pre ktorých exponenty platí  $a - b < a$ . (Zatiaľ čo nerovnosť  $b \leq a$  je za takéhoto predpokladu zrejma (väčší exponent znamená menší základ), menej zřejmý vzťah  $b \mid a$  je nutné v riešení dokázať.) Označme počty výskytov ľubovoľného prvočísla  $p$  v rozkladoch čísel  $a, b$  na súčin prvočísel. Máme vlastne ukázať, že pre tieto počty platí nerovnosť  $b_p \leq a_p$ . Porovnaním výskytov prvočísla  $p$  na oboch stranách rovnosti  $a^{a-b} = b^a$  získame vzťah  $(a-b) \cdot a_p = a \cdot b_p$ . Z toho v prípade  $a_p = 0$  máme aj  $b_p = 0$ ; v prípade  $a_p > 0$  potom dostávame  $b_p/a_p = 1 - b/a < 1$ . Tým je želaná nerovnosť  $b_p \leq a_p$  dokázaná.

### Riešenie 2:

Označme  $d$  najväčší spoločný deliteľ čísel  $a$  a  $b$ . Potom  $a = pd$  a  $b = qd$ , pričom  $p$  a  $q$  sú nesúdeliteľné kladné celé čísla. Dosadením do zadanej rovnosti a následnými ekvivalentnými úpravami postupne dostaneme:

$$\begin{aligned}(pd)^{(p-q)d} &= (qd)^{pd}, \\ (pd)^{p-q} &= (qd)^p, \\ p^{p-q} &= q^p \cdot d^q.\end{aligned}$$

Keďže  $p \geq 1$ , činiteľ z pravej strany poslednej rovnosti je násobkom  $q$ , takže násobkom  $q$  je aj celočíselná mocnina  $p^{p-q}$  z ľavej strany. Tá je však súčasne s číslom  $q$  nesúdeliteľná, lebo taký je jej základ  $p$ . Preto nutne  $q = 1$ . Dosadením do upravenej rovnosti dostaneme  $p^{p-1} = d$ , takže všetky riešenia sú tvaru  $a = pd = p^p$  a  $b = qd = p^{p-1}$ , pričom  $p$  je ľubovoľné celé kladné číslo.

### Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho:

- 1 bod za správny popis *všetkých* riešení (aj bez dôkazu, uhádnutím či experimentovaním),
- 1 bod za poznatok (aj bez dôkazu), že  $a$  je násobkom  $b$  (resp. že  $q = 1$  pri označení z druhého riešenia), ďalšie 2 body za jeho dôkaz,
- 2 body za postup vedúci od poznatku z bodu b) k opisu z bodu a)

Body za tieto položky možno sčítať. Za chýbajúcu skúšku body nestrhávajúte.

Slovenská komisia MO, ÚI PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

**Autori:** Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Bárta, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Radek Horenský, David Hruška, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

**Recenzenti:** Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

**Redakčná úprava:** Peter Novotný, Stanislav Krajčí

**Vydala:** IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021