

2010/2011
60. ročník MO

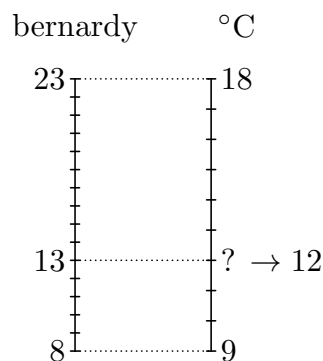
Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6

1. Keď Bernard natieral dvere garáže, pretrel omylom aj stupnicu nástenného vonkajšieho teplomera. Trubička s ortuťou však zostala nepoškodená, a tak Bernard pôvodnú stupnicu prelepil pásikom vlastnej výroby. Na nej starostlivo narysoval dieliky, všetky boli rovnako veľké a označené číslami. Jeho dielik mal však inú veľkosť ako pôvodný dielik, ktorý predstavoval jeden stupeň Celzia, a aj nulu Bernard umiestnil inde, ako bolo 0°C . Takto začal Bernard merať teplotu vo vlastných jednotkách: bernardoch. Keď by mal teplomer ukazovať teplotu 18°C , ukazoval 23 bernardov. Keď by mal ukazovať 9°C , ukazoval 8 bernardov. Aká je teplota v $^\circ\text{C}$, ak vidí Bernard na svojom teplomere teplotu 13 bernardov? (L. Šimůnek)

Riešenie. Pri 18°C ukazuje teplomer 23 bernardov. Keď teplota klesne na 9°C , teda o 9°C , ukazuje teplomer 8 bernardov, teda o 15 bernardov menej než v prvom prípade. Zmena teploty o 15 bernardov zodpovedá zmene o 9°C , teda zmena o 10 bernardov predstavuje zmenu o 6°C . Teplota 13 bernardov, na ktorú sa pýta úloha, je o 10 bernardov menšia ako teplota uvedená v úvode nášho riešenia. Teplota 13 bernardov je preto v stupňoch Celsia rovná

$$18 - 6 = 12.$$

Iné riešenie. Úloha sa dá riešiť aj graficky napr. na milimetrovom papieri ako na obr. 1.



Obr. 1

2. Firma vyrábajúca mikrovlnné rúry predávala na trhu vždy po krátkej prezentácii svoje modely. Vo štvrtok predala osem rovnakých mikrovlniek. Deň nato už ponúkala aj svoj nový model a ľudia si tak mohli kúpiť ten istý ako vo štvrtok alebo nový. V sobotu chceli všetci záujemcovia nový model a firma ich predala v ten deň šesť. V jednotlivých dňoch utržila 590 €, 720 € a 840 €, neprezradíme však, ktorá suma patrí ku ktorému dňu.

- Koľko stál starší model mikrovlnky?
- Koľko nových modelov predala firma v piatok?

Poznámka. Cena každej mikrovlnky bola v celých eurách. (L. Šimůnek)

Riešenie. Najprv sa pokúsime priradiť jednotlivé sumy ku dňom. Štvrtková tržba musí byť násobkom ôsmich, sobotná násobkom šiestich. Čísla 720 a 840 sú obe násobkami šiestich a ôsmich. Číslo 590 nie je násobkom šiestich ani ôsmich. Firma teda utržila

a) vo štvrtok 720 € a v sobotu 840 € alebo b) naopak. V piatok získala určite 590 €. Preverme obe možnosti.

a) Cena starej mikrovlnky by bola $720 : 8 = 90$ (€) a cena novej $840 : 6 = 140$ (€). Overíme, či sa z uvedených dvoch cien dá zložiť piatkových 590 €. Uvažujme postupne rôzne počty nových mikrovlniek, ich celkovú cenu vždy odčítame od 590 € a sledujeme, či je výsledný rozdiel deliteľný číslom 90.

za novú mikrovlnku	0	$1 \cdot 140$	$2 \cdot 140$	$3 \cdot 140$	$4 \cdot 140$
za starú mikrovlnku	590	450	310	170	30

Tabuľka ukazuje, že z cien 90 € a 140 € ide zložiť čiastku 590 €, a to jediným spôsobom: $1 \cdot 140 + 5 \cdot 90$.

b) Cena starej mikrovlnky by bola $840 : 8 = 105$ (€) a cena novej $720 : 6 = 120$ (€). Podobne ako v predchádzajúcom prípade overíme, či z uvedených dvoch cien ide zložiť piatkových 590 €. (Tabuľka bude jednoduchšia, ak vezmeme do úvahy, že piatková tržba za staré mikrovlnky musí mať na mieste jednotiek nulu, aby aj tržba za nové mikrovlnky mala na mieste jednotiek nulu.)

za starú mikrovlnku	0	$2 \cdot 105$	$4 \cdot 105$
za novú mikrovlnku	590	380	170

Tabuľka ukazuje, že z cien 105 € a 120 € sa nedá zložiť 590 €.

Úloha má teda jediné riešenie: stará mikrovlnka stála 90 € a v piatok firma predala jednu novú mikrovlnku.

3. *Vojto napísal číslo 2010 stokrát bez medzier za sebou. Koľko štvorciferných a koľko päťciferných súmerných čísel bolo skrytých v tomto zápise? (Súmerné číslo je také číslo, ktoré je rovnaké, či ho čítame spredu alebo zozadu, napr. 39193.)* (L. Hozová)

Riešenie. Vojtov zápis začína takto: 2010201020102010... Keby Vojto napísal 2010 dvakrát za sebou, bolo by v zápise jedno päťmiestne súmerné číslo 20102 a jedno päťmiestne súmerné číslo 10201. Keby napísal 2010 trikrát za sebou, bolo by v zápise každé z vyššie uvedených súmerných čísel dvakrát. Ak by sme pokračovali v tejto úvahe ďalej, zistíme, že keď Vojto napísal 2010 stokrát za sebou, bolo v zápise každé uvedené súmerné číslo 99-krát, t. j. 99-krát číslo 20102 a 99-krát číslo 10201.

V zápise teda bolo skrytých $2 \cdot 99 = 198$ päťmiestných súmerných čísel. Štvormiestne súmerné čísla v zápise nie sú.

4. *Súčin vekov deda Vendelína a jeho vnúčať je 2010. Súčet vekov všetkých vnúčať je 12 a žiadne dve vnúčaťá nemajú rovnako veľa rokov. Koľko vnúčať má dedo Vendelín?* (L. Hozová)

Riešenie. Prvočíselný rozklad čísla 2010 je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Možnosť, že by mal dedo $2 \cdot 67 = 134$ alebo dokonca viacej rokov, môžeme hneď zavrhnúť (a aj keby sme taký vysoký vek deda pripustili, nevedlo by to k riešeniu úlohy). Dedo musí mať teda

67 rokov a súčin vekov jeho vnúchat je rovný $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Nájdime všetky rozklady čísla 30 na súčin rôznych prirodzených čísel a preverme, kedy tieto čísla majú súčet 12:

$$1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Potrebný súčet (12) je jedine v súčine $1 \cdot 5 \cdot 6$. Dedo Vendelín má teda tri vnúchatá, ktoré majú 1 rok, 5 rokov a 6 rokov.

5. Na tábore sa dvaja vedúci s dvoma táborníkmi a psom potrebovali dostať cez rieku a k dispozícii mali iba jednu loďku s nosnosťou 65 kg. Našťastie všetci (okrem psa) dokázali loďku cez rieku priviezť. Každý vedúci vážil približne 60 kg, každý táborník 30 kg a pes 12 kg. Ako si mali počínať? Koľkokrát najmenej musela loďka prekonať rieku? (M. Volfová)

Riešenie. Najskôr sa prevezú obaja chlapci (1), jeden sa vráti späť (2), potom pôjde na druhý breh vedúci (3), späť sa prepraví druhý chlapec (4), opäť sa obaja chlapci prevezú na opačný breh (5), jeden z nich pôjde späť (6), prevezie sa druhý vedúci (7), druhý chlapec pôjde späť (8), teraz jeden z chlapcov vezme psa a prevezie ho (9), vráti sa po kamaráta (10) a nakoniec sa obaja chlapci prevezú na druhý breh (11) a už sú tam všetci.

Poznámka. Dá sa nájsť aj iné riešenie, ale riešenie s menej ako 11 cestami nie je. To je spôsobené najmä tým, že s vedúcim v loďke už nikto iný nemôže ísť. Preto napr. podobná úloha s jedným vedúcim a jedným táborníkom by vôbec nebola riešiteľná a na prevoz jedného vedúceho a dvoch táborníkov by bolo treba 5 prevezení. . .

6. Karol obstaval krabicu s obdĺžnikovým dnom obrubou z kocôčok. Použil práve 22 kocôčok s hranou 1 dm, ktoré staval tesne vedľa seba v jednej vrstve. Medzi obrubou a stenami krabice nebola medzera a celá táto stavba mala obdĺžnikový pôdorys. Aké rozmery mohlo mať dno krabice? (M. Krejčová)

Riešenie. Okrem štyroch rohových kocôčok sa všetky dotýkajú celou svojou stenou niektorej steny krabice a každá stena krabice je bez medzier obstavaná radom kocôčok. Dno krabice má teda obvod $22 - 4 = 18$ (dm), a keďže $18 = 2 \cdot 9$ a $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ sú všetky celočíselné rozklady čísla 9 na dva sčítance, má dno krabice niektorý z nasledujúcich rozmerov (v dm): $1 \times 8, 2 \times 7, 3 \times 6, 4 \times 5$.