MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

1 Je možné vyplniť tabuľku 8×8 šestkami a sedmičkami tak, aby súčet čísel v každom riadku bol deliteľný piatimi a súčet čísel v každom stĺpci bol deliteľný siedmimi?

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

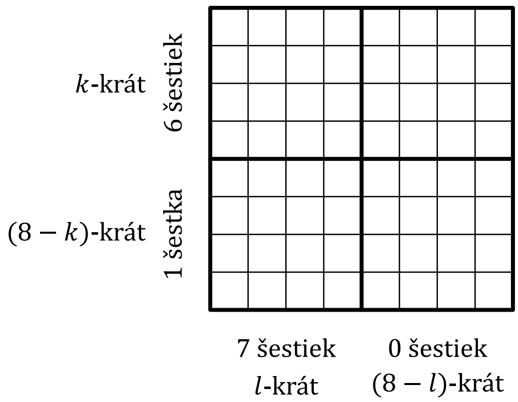
Nie je to možné, dôkaz urobíme sporom.

Predpokladajme teda, že tabuľku 8×8 máme požadovaným spôsobom vyplnenú. Postupne zistíme, koľko riadkov a stĺpcov obsahuje koľko šestiek a sedmičiek. Spor nakoniec vyplynie z toho, že také kombinácie počtov sa nedajú dosiahnuť.

Zamerajme sa najskôr na ľubovoľný riadok vyplnenej tabuľky. Súčet všetkých čísel v ňom je aspoň $8 \cdot 6$ čiže 48 a nanajvýš $8 \cdot 7$ čiže 56. Keďže je to podľa predpokladu násobok piatich, musí byť rovný jednému z čísel 50 alebo 55. Zrejme je v prvom prípade v riadku 6 šestiek a 2 sedmičky, v druhom prípade v ňom je 1 šestka a 7 sedmičiek.

Podobne súčet všetkých čísel v ľubovoľnom stĺpci je podľa zadania násobok siedmich opäť z množiny $\{48, \dots, 56\}$, musí byť preto rovný jednému z čísel 49 alebo 56. Zrejme je v prvom prípade v stĺpci 7 šestiek a 1 sedmička, v druhom prípade je v ňom je 8 sedmičiek a 0 šestiek. (Okamžite to vyplýva aj z úvahy, že počet šestiek v každom stĺpci musí byť deliteľný siedmimi.)

Skúmajme ďalej iba počty šestiek (rovnako úspešne možno pracovať iba s počtami sedmičiek). Vzhľadom na ich vyššie určené možné počty označíme k počet riadkov, ktoré obsahujú 6 šestiek, a l počet stĺpcov, ktoré obsahujú 7 šestiek. Ako vieme, zvyšných $8 - k$ riadkov obsahuje 1 šestku a zvyšných $8 - l$ stĺpcov obsahuje 0 šestiek. Prehľadne to zachytíme na tomto obrázku (poradia riadkov ani stĺpcov nie sú podstatné):



Najskôr ukážeme, že $k = l = 4$ (ako máme na obrázku). Z počítania po stĺpcoch vyplýva, že celkový počet šestiek v tabuľke je $7l$, teda násobok siedmich, ktorý je z počítania po riadkoch rovný $k \cdot 6 + (8 - k) \cdot 1 = 5k + 8$. Keďže $k \in \{0, \dots, 8\}$, číslo $5k + 8$ je deliteľné siedmimi zrejme iba v prípade $k = 4$, keď je rovné 28. To však už znamená, že aj $l = 4$.

Situácia $k = l = 4$ však nastať nemôže (ako napovedá pohľad na našu tabuľku): Z rovnosti $l = 4$ vyplýva, že v 4 stĺpcoch nie je žiadna šestka, takže v žiadnom riadku nemôžu byť viac ako 4 šestky. To je v spore s rovnosťou $k = 4$, ktorá znamená, že v 4 riadkoch je šestiek dokonca 6.

Poznámka:

Poznatok, že $k = l = 4$, možno odvodiť aj nasledujúcou úvahou o súčte S všetkých čísel v tabuľke: Keďže súčet čísel v každom riadku je deliteľný piatimi, je aj číslo S deliteľné piatimi. Rovnakou úvahou pre sčítanie po stĺpcoch zistíme, že číslo S je tiež deliteľné siedmimi. Keďže čísla 5 a 7 sú nesúdeliteľné, je súčet S deliteľný aj číslom $5 \cdot 7$ čiže 35. Navyše zo sčítania po riadkoch (8 sčítancov, každý, ako vieme, rovný 50 alebo 55) zisťujeme, že $400 = 8 \cdot 50 \leq S \leq 8 \cdot 55 = 440$. Jediný vyhovujúci násobok čísla 35 vyhovujúci týmto podmienkam je 420. Preto $S = 420$, takže počet šestiek n platí $n \cdot 6 + (64 - n) \cdot 7 = 420$, z čoho $n = 28$. V celej tabuľke je tak 28 šestiek (a 36 sedmičiek), čo už vedie k $k = l = 4$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach (vrátane pokusov o dôkaz sporom) oceňte čiastkové výsledky nasledovne:

A Správna (t. j. negatívna) odpoveď (aj bez zdôvodnenia, avšak slovne zapísaná): 1 bod.

B1 Určenie oboch možností $(6, 2)$ a $(1, 7)$ pre počty šestiek a sedmičiek v každom riadku: 1 bod.

B2 Určenie oboch možností $(7, 1)$ a $(0, 8)$ pre počty šestiek a sedmičiek v každom stĺpci: 1 bod.

B3 Dôkaz, že $k = l = 4$, t. j. že práve štyri riadky sú typu $(6, 2)$ a práve štyri stĺpce sú typu $(7, 1)$, pozri B1, resp. B2): 2 body.

B4 Spor v prípade $k = l = 4$: 1 bod.

C Spor v každom z prípadov, keď neplatí $k = l = 4$: 5 bodov.

Celkovo potom dajte maximálnu hodnotu z A, zo súčtu v bodoch B1, B2, B3, B4 a z C.

Určovanie počtov šestiek a sedmičiek v jednom riadku alebo stĺpci (či v celej tabuľke) podľa ich zadaného súčtu je natoľko zrejmé, že ho nie je nutné opisovať (ako sme to urobili my až pre súčet čísel v celej tabuľke v poznámke za riešením).

---

2 V obore kladných reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= x + 2y + 3z, \\ y^2 + 2z^2 &= 2x + 3y + 4z, \\ z^2 + 2x^2 &= 3x + 4y + 5z. \end{aligned}$$

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Všimnime si, že pravá strana druhej rovnice je aritmetickým priemerom pravých strán zvyšných dvoch rovníc. Ak preto odčítame od súčtu prvej a tretej rovnice dvojnásobok druhej rovnice, vyjde rovnica s nulovou pravou stranou

$$(x^2 + 2y^2) + (z^2 + 2x^2) - 2(y^2 + 2z^2) = 0,$$

čiže $3x^2 - 3z^2 = 0$. Keďže x a z sú kladné čísla, vyplýva z toho $x = z$. Po dosadení x za z sa zmení pôvodná sústava na tvar

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 4x + 2y = 2(2x + y), \\ 2x^2 + y^2 &= 6x + 3y = 3(2x + y), \\ 3x^2 &= 8x + 4y = 4(2x + y). \end{aligned}$$

Porovnaním prvej a tretej rovnice dostávame $2(x^2 + 2y^2) = 4(2x + y) = 3x^2$, teda $x^2 = 4y^2$, z čoho vzhľadom na $x, y > 0$ vyplýva $x = 2y$. Po dosadení $2y$ za x sa zmení upravená sústava na tvar

$$\begin{aligned} 6y^2 &= 10y, \\ 9y^2 &= 15y, \\ 12y^2 &= 20y. \end{aligned}$$

Keďže $y \neq 0$, je každá z troch rovníc ekvivalentná s $y = 5/3$. Vzhľadom na odvodené vzťahy $x = 2y$ a $z = x$ tak platí $(x, y, z) = (10/3, 5/3, 10/3)$. Skúška pri tomto postupe nie je nutná.

Riešenie 2:

Na danú sústavu sa môžeme pozerať ako na sústavu troch lineárnych rovníc s neznámymi x^2, y^2, z^2 a parametrami x, y, z. Jej riešením dostaneme $x^2 = \frac{3x+4y+5z}{3}$, $y^2 = \frac{y+2z}{3}$, $z^2 = \frac{3x+4y+5z}{3}$. Z toho $x^2 = z^2$, teda $x = z$. Po dosadení x za z tak z odvodených vyjadrení dostaneme $x^2 = \frac{8x+4y}{3} = \frac{4(2x+y)}{3}$ a $y^2 = \frac{2x+y}{3}$. Teraz vidíme, že $x^2 = 4y^2$, čiže $x = 2y$. Ďalej už postupujeme rovnako ako v prvom riešení.

Poznámka:

Zmieňme sa ešte o iných dôsledkoch zadanej sústavy rovníc, ktorými sú kvadratické rovnice pre dve z troch neznámych x, y, z. Ak napríklad od dvojnásobku tretej rovnice odčítame druhú rovnicu, dostaneme

$$4x^2 - y^2 = 2(3x + 4y + 5y) - (2x + 3y + 4z) = 4x + 5y + 6z.$$

Ak sem dosadíme za z (či rovno za $3z$) z prvej rovnice, získame pre neznáme x, y po jednoduchej úprave kvadratickú rovnicu $2x^2 - 5y^2 = 2x + y$. Podobne po odčítaní tretej rovnice od dvojnásobku prvej rovnice možno použitím druhej rovnice získať pre neznáme y, z rovnicu $3y^2 = y + 2z$. Najlepší výsledok však dáva odčítanie prvej rovnice od dvojnásobku druhej rovnice, keď s prihliadnutím na tretiu rovnicu získame pre neznáme x, z rovnicu $x^2 - z^2 = 0$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte čiastkové výsledky nasledovne:

A1 Uvedenie riešenia $(10/3, 5/3, 10/3)$ (aj bez zdôvodnenia): 1 bod.

A2 Odvodenie aspoň jednej z kvadratických rovníc pre dve neznáme, ktorá nie je dôsledkom vzťahov $x = 2y = z$, ako napr. $2x^2 - 5y^2 = 2x + y$ alebo $3y^2 = y + 2z$: 1 bod.

B1 Odvodenie vzťahu $x = z$: 3 body.

B2 Odvodenie vzťahu $x = 2y$ alebo $z = 2y$: 2 body.

Celkovo potom dajte maximálnu hodnotu zo súčtu bodov z A1 a z A2 a zo súčtu bodov z B1 a z B2.

Ak riešiteľ eliminuje jednu z neznámych, napríklad z, a to tak, že vyjadrenie z z prvej rovnice dosadí do zvyšných dvoch rovníc, žiadny bod neudeľujte, ak nie je pri pokuse o riešenie získanej sústavy dvoch rovníc štvrtého stupňa o dvoch neznámych dosiahnutý významný pokrok, akým sú vzťahy z A2, B1 či B2.

---

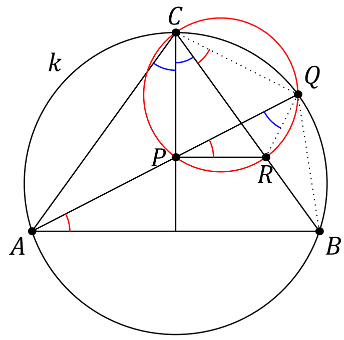
3 Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB a bod P vnútri jeho výšky z vrcholu C. Priamka AP pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q rôznom od A. Rovnobežka so základňou AB vedená bodom P pretína rameno BC v bode R. Dokážte, že polpriamka QR je osou uhla AQB.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Z rovnobežnosti PR a AB a zo zhodnosti obvodových uhlov BAQ a BCQ v kružnici k opísanej trojuholníku ABC vyplýva zhodnosť uhlov RPQ a RCQ. Body P, R, Q a C teda ležia v tomto poradí na jednej kružnici, t. j. štvoruholník $PRQC$ je tetivový.

V kružnici opísanej štvoruholníku $PRQC$ sú zhodné obvodové uhly PQR a PCR.



Uhol PCR je však tiež zhodný s uhlom PCA, lebo v rovnoramennom trojuholníku leží výška z hlavného vrcholu na osi vnútorného uhla. Napokon s prihliadnutím na zhodné obvodové uhly ACB a AQB v kružnici k dokopy dostávame

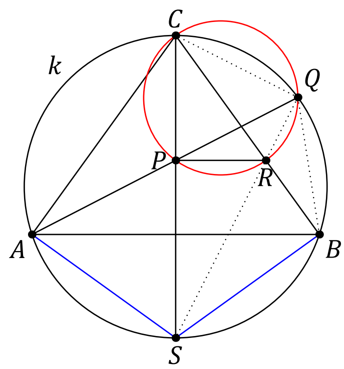
$$|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle PCR| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle AQB|,$$

a preto polpriamka QR je osou uhla AQB, ako sme mali dokázať.

Riešenie 2:

Najprv rovnako ako v 1. riešení ukážeme, že štvoruholník $PRQC$ je tetivový.

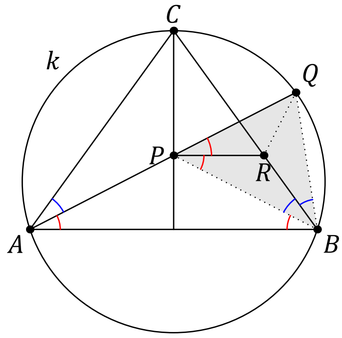
Označme S taký bod, že úsečka CS je priemerom kružnice k.



Keďže štvoruholník $PRQC$ je tetivový, je pravý nielen uhol CPR, ale aj uhol CQR, navyše je pravý aj uhol CQS v kružnici k. Zhodnosť uhlov CQR a CQS znamená, že polpriamky QR a QS splývajú. Vďaka rovnosti $|AC| = |BC|$ platí aj rovnosť $|AS| = |BS|$, teda bod S je stredom toho oblúka AB kružnice k, ktorý neobsahuje bod Q. Polpriamka QS čiže QR je tak naozaj osou uhla AQB, lebo zhodným oblúkom AS a BS kružnice k prislúchajú zhodné obvodové uhly AQS a BQS.

Riešenie 3:

Úlohu vyriešime, keď dokážeme, že bod R je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PBQ. Na to stačí overiť, že polpriamky PR a BC sú osami vnútorných uhlov BPQ, resp. PBQ



- Potrebnú zhodnosť uhlov BPR a QPR odvodíme z toho, že $PR \parallel AB$ a že AB je základňa rovnoramenného trojuholníka ABP. Z toho už máme

$$|\sphericalangle BPR| = |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle QPR|.$$

- Potrebnú zhodnosť uhlov PBC a QBC odvodíme z toho, že uhol PBC je podľa osi CP súmerne združený s uhlom PAC a že QAC a QBC sú zhodné obvodové uhly v kružnici k. Z toho už máme

$$|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle QBC|.$$

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte čiastkové výsledky nasledovne:

A1 Štvoruholník $PRQC$ je tetivový: 3 body s dôkazom, 0 bodov bez dôkazu.

A2 Dokončenie dôkazu za predpokladu A1 (aj nedokázaného): 2 body.

B1 Polpriamka PR je osou uhla BPQ: 2 body s dôkazom, 0 bodov bez dôkazu.

B2 Polpriamka BC je osou uhla PBQ: 2 body s dôkazom, 0 bodov bez dôkazu.

B3 Dokončenie dôkazu za predpokladov B1 a B2 (aj nedokázaných): 1 bod.

Celkovo potom dajte maximálnu hodnotu zo súčtu bodov z A1 a A2 a zo súčtu bodov z B1, B2 a B3.

---

4 Dokážte, že každá nekonečná postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ celých čísel taká, že platí $a_0 \geq 1$ a

$$a_{n+1} \in \{2022a_n - 1, 2022a_n + 1\}$$

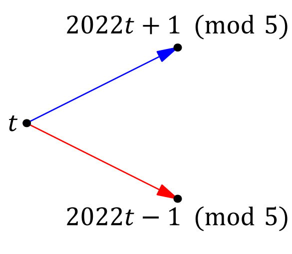
pre všetky indexy n, obsahuje nekonečne veľa zložených čísel.

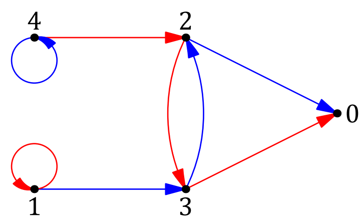
(Martin Melicher)

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme sporom. Pripusťme teda, že postupnosť obsahuje iba konečne veľa zložených čísel, teda že od určitého indexu obsahuje postupnosť už iba prvočísla. Keďže postupnosť je všade rastúca (lebo pre každé kladné t platí $2022t + 1 > 2022t - 1 > t$), môžeme tento index m vybrať tak, aby navyše platilo $a_m > 5$, a teda aj $a_i > 5$ pre všetky indexy i také, že $i \geq m$.

Skúmajme zvyšky členov a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ... po delení piatimi. Schéma na obrázku vpravo znázorňuje, ktoré zvyšky po delení piatimi dávajú čísla $2022t + 1$ (modré šípky) a $2022t - 1$ (červené šípky) v závislosti od toho, ktorý zvyšok dáva číslo t. Keďže nami skúmané členy a_i, kde $i \geq m$, nie sú násobkami piatich (sú to totiž prvočísla väčšie ako 5), nezakreslili sme do nášho grafu šípky vychádzajúce z uzla 0.





Keďže nekonečná postupnosť prvočísel $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$ neobsahuje žiadne číslo deliteľné 5, je zo schémy zrejmé, že nastane práve jeden z troch prípadov:

a) Všetky jej členy dávajú zvyšok 4.
b) Všetky jej členy dávajú zvyšok 1.
c) Od istého jej člena dávajú členy striedavo zvyšky 2 a 3.

Každý z týchto troch prípadov dovedieme ku sporu podobným spôsobom. Vždy pritom využijeme toto pomocné tvrdenie:

Uvažujme nekonečnú všade rastúcu postupnosť celých čísel $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, ktorá pre každý index i spĺňa rovnosť $x_{i+1} = q \cdot x_i + d$, pričom $x_0 \geq 2$, q a d sú celé čísla a $q \geq 1$. Potom niektorý jej člen je zložené číslo.

Dôkaz tvrdenia urobíme sporom podobne ako v druhom riešení šiestej úlohy domáceho kola. Predpokladajme teda ďalej, že všetky členy našej postupnosti sú prvočísla. Keďže je daná postupnosť všade rastúca, vyberieme index i taký, že člen x_i je také prvočíslo, ktoré je s číslom q nesúdeliteľné. Dokážeme, že sa potom niektorý násobok x_i rovná jednému z väčších členov postupnosti. Dôkaz sporom tak bude ukončený.

Uvažujme zobrazenie f také, že $f(z) = qz + d$, kde $z \in \{0, 1, 2, \dots, x_i - 1\}$. Ukážeme, že zobrazenie f je prosté. Naozaj, ak $z_1, z_2 \in \{0, 1, 2, \dots, x_i - 1\}$, tak zo vzťahu

$$x_i \mid f(z_1) - f(z_2) = (qz_1 + d) - (qz_2 + d) = q(z_1 - z_2)$$

vďaka nesúdeliteľnosti x_i a q vyplýva $x_i \mid z_1 - z_2$, a teda $z_1 = z_2$. Podľa návodnej úlohy N3 k 6. úlohe domáceho kola sa preto zvyšky čísel $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots$ po delení x_i opakujú periodicky bez predperiódy. Keďže zvyšok x_i po delení x_i je rovný 0, má rovnaký zvyšok 0 po delení x_i dokonca nekonečne veľa členov našej postupnosti. Tým je dôkaz tvrdenia ukončený.

Teraz použitím dokázaného tvrdenia rozoberieme vyššie určené prípady:

a) Ak $i \geq m$, tak $a_{i+1} = 2022a_i + 1$, takže sporný záver vyplýva okamžite z nášho tvrdenia pre postupnosť $(a_m, a_{m+1}, \dots)$, pričom $q = 2022$ a $d = 1$.
b) Ak $i \geq m$, tak $a_{i+1} = 2022a_i - 1$, takže sporný záver vyplýva okamžite z nášho tvrdenia pre postupnosť $(a_m, a_{m+1}, \dots)$, pričom $q = 2022$ a $d = -1$.
c) Označme n niektorý index, pre ktorý platí $n \geq m$ a $a_n \equiv 2 \pmod 5$. Potom pre každé k platí

$$a_{n+2k+2} = 2022a_{n+2k+1} + 1 = 2022 \cdot (2022a_{n+2k} - 1) + 1 = 2022^2 \cdot a_{n+2k} - 2021,$$

takže sporný záver vyplýva z nášho tvrdenia pre postupnosť $(a_n, a_{n+2}, a_{n+4}, \dots)$, pričom $q = 2022^2$ a $d = -2021$.

Poznámka:

Ukážeme stručne iný spôsob, ako môžeme vylúčiť všetky tri prípady z predchádzajúceho riešenia bez toho, aby sme použili dokázané tvrdenie.

a) Ak $i \geq m$, tak $a_{i+1} = 2022a_i + 1$, takže $a_{i+1} \equiv a_i + 1 \pmod{2021}$. Z toho indukciou pre každé prirodzené k dostávame $a_{m+k} \equiv a_m + k \pmod{2021}$. Vidíme, že $2021 \mid a_{m+k}$ zakaždým, keď $2021 \mid a_m + k$, čo spĺňa nekonečne veľa prirodzených k.
b) Ak $i \geq m$, tak $a_{i+1} = 2022a_i - 1$, odkiaľ indukciou pre každé prirodzené k dostávame $a_{m+k} \equiv a_m - k \pmod{2021}$ s týmto sporným záverom: $2021 \mid a_{m+k}$ zakaždým, keď $2021 \mid a_m - k$.
c) Označme n niektorý index, pre ktorý platí $n \geq m$, a pre každé prirodzené i platí $a_{n+2i+1} = 2022a_{n+2i} + 1$ a $a_{n+2i+2} = 2022a_{n+2i+1} - 1$, odkiaľ $a_{n+2i+1} \equiv -a_{n+2i} + 1 \pmod{2023}$ a $a_{n+2i+2} \equiv -a_{n+2i+1} - 1 \pmod{2023}$. Vylúčením a_{n+2i+1} z týchto dvoch kongruencií dostaneme $a_{n+2i+2} \equiv a_{n+2i} - 2 \pmod{2023}$, takže indukciou pre každé prirodzené k vychádza $a_{n+2k} \equiv a_n - 2k \pmod{2023}$ s týmto sporným záverom: $2023 \mid a_{n+2k}$ zakaždým, keď $2023 \mid a_n - 2k$.

Pokyny:

Poznatky z riešenia 6. úlohy domáceho kola (vrátane návodných a dopĺňajúcich úloh) možno prehlásiť za známe. V neúplných riešeniach podľa vzorového postupu ohodnoťte čiastkové výsledky nasledovne:

A1 Rozhodnutie uvažovať zvyšky členov a_i po delení číslom 5: 1 bod.
A2 Dôkaz, že nastane jeden z troch prípadov a), b), c): 2 body.
A3 Vyriešenie aspoň jedného z prípadov a), b): 1 bod.
A4 Vyriešenie prípadu c): 1 bod.

Celkovo potom dajte súčet bodov z A1, A2, A3 a A4.