MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5

1 Do kruhových políčok doplňte prirodzené čísla od 1 do 20 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a súčasne platili všetky uvedené vzťahy.

$$\bigcirc \xrightarrow{-\,5} \bigcirc \xrightarrow{:\,8} \bigcirc \xrightarrow{\cdot\,9} \bigcirc \xrightarrow{-\,2} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{+\,3} \bigcirc \xrightarrow{:\,7} \bigcirc \xrightarrow{\cdot\,3} \bigcirc \xrightarrow{+\,12} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{-\,2} \bigcirc \xrightarrow{+\,3} \bigcirc \xrightarrow{:\,5} \bigcirc \xrightarrow{\cdot\,4} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{:\,4} \bigcirc \xrightarrow{+\,7} \bigcirc \xrightarrow{:\,2} \bigcirc \xrightarrow{\cdot\,3} \bigcirc$$

(Miroslava Farkas Smitková)

Riešenie:

Pri doplňovaní je vhodné začať s políčkami predchádzajúcimi deleniu, pričom väčší deliteľ znamená menej možností.

Napr. v druhom políčku prvého riadku môže byť buď 8, alebo 16 (sú to spomedzi našich čísel jediné čísla deliteľné 8). Ak by v tomto políčku bolo 16, muselo by v predchádzajúcom políčku byť 21 (lebo $21 - 5 = 16$), čo je však viac než 20. Preto je v onom políčku 8. Podľa predpísaných operácií doplníme celý riadok a overíme, že sa žiadne číslo neopakuje:

$$13 \xrightarrow{-\,5} 8 \xrightarrow{:\,8} 1 \xrightarrow{\cdot\,9} 9 \xrightarrow{-\,2} 7$$

V druhom políčku druhého riadku môže byť buď 7, alebo 14 (sú to jediné čísla deliteľné 7). Číslo 7 je už použité v predchádzajúcom riadku, teda v onom políčku je 14. Podľa predpísaných operácií doplníme celý riadok a overíme, že sa žiadne číslo neopakuje:

$$11 \xrightarrow{+\,3} 14 \xrightarrow{:\,7} 2 \xrightarrow{\cdot\,3} 6 \xrightarrow{+\,12} 18$$

V treťom políčku tretieho riadku môže byť 5, 10, 15 alebo 20 (sú to jediné čísla deliteľné 5). Žiadne z týchto čísel nie je zatiaľ použité, takže môžeme skúšať dosadzovať:

- Ak by sme dosadili 5, resp. 10, tak v nasledujúcom políčku (po delení 5) by bolo 1, resp. 2. Obe tieto čísla však už sú použité.
- Ak by sme dosadili 15, tak v predchádzajúcom políčku by bolo 12 (lebo $12 + 3 = 15$) a v prvom políčku 14 (lebo $14 - 2 = 12$). Toto číslo je už však použité v druhom riadku.
- Ostáva dosadiť 20. Podľa predpísaných operácií doplníme celý riadok a overíme, že sa žiadne číslo neopakuje:

$$19 \xrightarrow{-\,2} 17 \xrightarrow{+\,3} 20 \xrightarrow{:\,5} 4 \xrightarrow{\cdot\,4} 16$$

Na posledný riadok ostávajú zatiaľ nepoužité čísla 3, 5, 10, 12 a 15. V prvom políčku musí byť 12 (jediné z týchto čísel je deliteľné 4). Doplnenie podľa predpísaných operácií vyčerpáva práve zostávajúce čísla, teda sa naozaj nič neopakuje:

$$12 \xrightarrow{:\,4} 3 \xrightarrow{+\,7} 10 \xrightarrow{:\,2} 5 \xrightarrow{\cdot\,3} 15$$

2 Trpaslíci natierali kocky zelenou a bielou farbou tak, že každá stena bola celá ofarbená jednou z týchto dvoch farieb. Po chvíli si všimli, že niektoré ofarbené kocky vyzerajú po vhodnom pootočení úplne rovnako, a začali ich podľa toho triediť do skupín (v rovnakej skupine sú rovnako ofarbené kocky). Najviac koľko skupín mohli takto dostať?

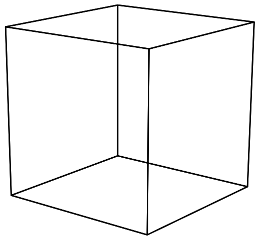
(Iveta Jančigová)

Riešenie:

Kocky má šesť stien, pričom každá stena susedí so štyrmi ďalšími stenami (majú spoločnú hranu) a s jednou stenou je rovnobežná (nemajú žiadny spoločný bod).

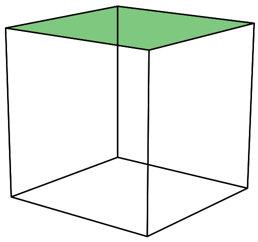
Možné ofarbenia môžeme triediť podľa počtu zelených (resp. bielych) stien. Takto dostávame sedem možností, pre ktoré postupne rozoberieme rôzne typy ofarbení. (Nakreslené kocky možno v štandardnom prehliadači .pdf súborov Adobe Acrobat Reader (po kliknutí na ne) aj ľubovoľne otáčať.)

- Žiadna stena zelená (všetky biele):



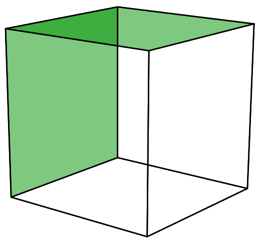
  Všetky aj kocky vyzerajú rovnako, teda máme jediný typ.

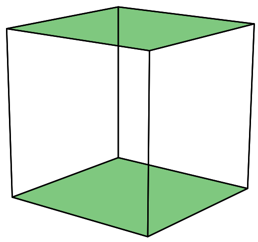
- Jedna stena zelená (päť bielych):



  Taktiež jediný typ.

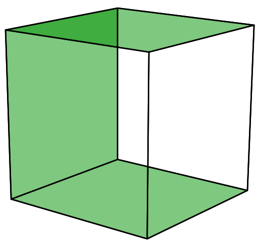
- Dve steny zelené (štyri biele):

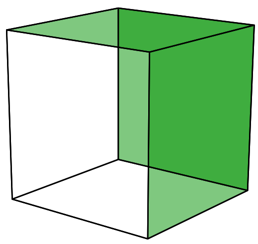




  Rozlišujeme dva typy podľa toho, či spolu zelené steny susedia, alebo nie.

- Tri steny zelené (tri biele):





  Rozlišujeme dva typy podľa toho, či zelené steny susedia po dvoch, alebo všetky navzájom.

- Ostatné prípady netreba vypisovať, diskusie pre možnosti s prehodenými počtami zelených a bielych stien sú rovnaké.

Celkovo dostávame $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$ čiže 10 typov ofarbení. Trpaslíci teda mohli dostať najviac 10 skupín ofarbených kociek.

---

3 Adam prepočítaval svoju zbierku dúhových guľôčok. Zistil, že ich môže rozdeliť do rovnako početných kôpok, a to viacerými spôsobmi. Keby ich rozdelil do troch kôpok, bolo by v každej kôpke o osem guľôčok viac, než by bolo v každej kôpke pri delení do štyroch kôpok. Koľko mal Adam dúhových guľôčok?

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Preskupovanie guľôčok zo štyroch kôpok do troch je možné urobiť tak, že všetky guľôčky z jednej kôpky sa rozdelia do troch zvyšných.

V každej z troch nových kôpok bolo o osem guľôčok viac než pôvodne, teda kôpka, z ktorej sa rozdávalo, mala $3 \cdot 8$ čiže 24 guľôčok.

Všetky kôpky boli rovnako početné a pôvodne boli štyri, teda Adam mal $24 \cdot 4$ čiže 96 guľôčok.

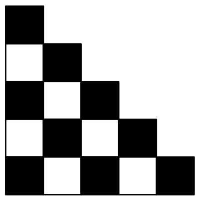
Dosadením do zadania ľahko zistíme, že tento počet mu naozaj vyhovuje.

Poznámka:

Ak neznámy počet guľôčok v každej zo štyroch kôpok označíme k, tak podmienku zo zadania je možné vyjadriť rovnicou $4k = 3 \cdot (k + 8)$. Rozpísaním dostávame $4k = 3k + 24$, t. j. $k = 24$.

---

4 Jaro vystrihol z rohu šachovnice nasledujúci útvar pozostávajúci z pätnástich polí:

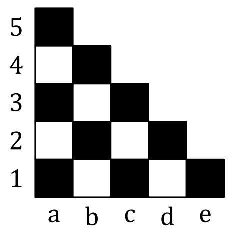


Následne odstrihol niekoľko ďalších polí, a to tak, že výsledný útvar neobsahoval diery a nerozpadal sa, mal rovnaký počet čiernych a bielych polí a mal najväčší možný obsah. Navyše zistil, že zo všetkých možných útvarov s týmito vlastnosťami mal ten jeho najväčší možný obvod. Ktoré polia Jaro dodatočne odstrihol? Určte všetky možnosti.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

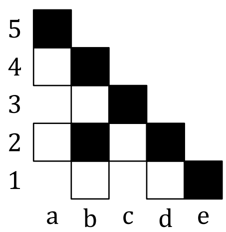
Pôvodný Jarov útvar tvorilo 9 čiernych a 6 bielych polí, teda čiernych polí bolo o 3 viac než bielych. Ak po odstrihnutí ďalších polí mal útvar rovnaký počet bielych a čiernych polí a súčasne najväčší možný obsah, musel Jaro odstrihnúť tri čierne polia. Kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu si polia označíme ako na bežnej šachovnici:

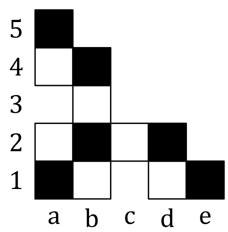


Aby nový útvar neobsahoval diery a ani sa nerozpadol na viac častí, nemohol Jaro odstrihávať polia len tak (iste napr. nemohol odstrihnúť pole b2 či pole c1 spoločne s poľom d2). S týmto vedomím preskúmame, ako odstrihnutie jednotlivých polí ovplyvňuje obvod útvaru:

- Po odstrihnutí ktoréhokoľvek z polí a5 a e1 sa obvod zmenší – namiesto pôvodných troch strán sa na obvode prejaví jedna nová.
- Po odstrihnutí ktoréhokoľvek z polí a1, b4, c3 a d2 sa obvod nezmení – namiesto pôvodných dvoch strán sa na obvode prejavia dve nové.
- Po odstrihnutí ktoréhokoľvek z polí a3 a c1 sa obvod zväčší – namiesto pôvodnej jednej strany sa na obvode prejavia dve nové.

Teda Jaro odstrihol polia a3, c1 a ďalej buď a1, alebo c3 (každá iná voľba by mala za následok rozpad či väčší obvod útvaru):





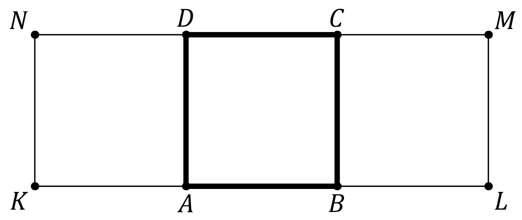
---

5 Na papieri bol narysovaný štvorec $ABCD$ so stranou 4 cm. Pavol zostrojil vrcholy obdĺžnika, ktorý mal trikrát väčší obsah než štvorec $ABCD$. Pritom rysoval iba kružnica, pretože pravítko nenašiel. Ako mohol Pavol postupovať? Popíšte aspoň jednu konštrukciu.

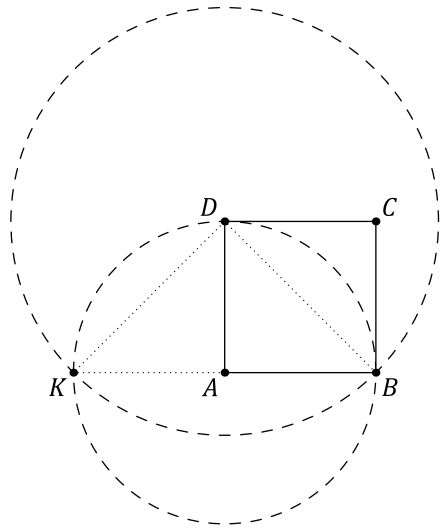
(Karel Pazourek)

Riešenie:

Pavlov obdĺžnik pomenujeme $KLMN$. Tento obdĺžnik môže byť zložený z troch štvorcov zhodných s $ABCD$, a to napr. takto:



Úsečka AK je zhodná so stranou štvorca, teda bod K leží na kružnici so stredom v bode A a s polomerom $|AB|$. Úsečka DK je zhodná s uhlopriečkou štvorca, teda bod K leží na kružnici so stredom v bode D a s polomerom $|DB|$. Uvedomme si, že tieto dve kružnice majú dva spoločné body – okrem hľadaného K ešte vrchol B daného štvorca.



Ostatné tri vrcholy L, M a N zostrojíme analogicky.

---

6 Na parkovisku stáli autá a bicykle. Ak by prišlo jedno ďalšie auto, bolo by ich rovnako veľa ako bicyklov. Ak by prišlo päť ďalších bicyklov, mali by všetky bicykle rovnaký počet kolies ako všetky autá. Koľko stálo na parkovisku áut a koľko bicyklov?

(Monika Dillingerová)

Riešenie:

Auto má štyri kolesá, bicykel dve, jedno auto má teda rovnaký počet kolies ako dva bicykle.

Bicyklov na parkovisku bolo o jeden viac než áut. Uvažujme situáciu, keď by na parkovisku bolo o päť bicyklov viac než pôvodne, teda situácii, keď by súhlasili počty kolies. V takom prípade by bolo bicyklov o šesť viac než áut.

Šesť bicyklov navyše znamená 12 kolies navyše. Tento rozdiel zodpovedá práve šiestim autám (lebo auto má o dve kolesá viac než bicykel a $2 \cdot 6 = 12$). Teda na parkovisku stálo 6 áut a 7 bicyklov (o jeden viac než áut).

Dosadením do zadania ľahko zistíme, že tieto počty mu naozaj vyhovujú.

Poznámka:

Úvahu v predposlednom odseku nahradzuje skúšanie možností, keď sa postupne zvyšujú počty dopravných prostriedkov a kontroluje sa ich rozdiel:

áut	3	4	5	6	...
bicyklov	6	8	10	12	...
rozdiel	3	4	5	6	...

Sledovaný rozdiel sa stále zväčšuje, teda úloha iné riešenie nemá.

Poznámka:

Ak by sme predpokladali, že každé auto má aj jedno rezervné koleso, tak by sme obdobnými úvahami dospeli k záveru, že na parkovisku stáli štyri autá a päť bicyklov.