MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9

1 Adam, Boris a Cyril porovnávali, koľko kilogramov gaštanov nazbierali. Zistili, že aritmetický priemer toho, čo nazbieral Adam s Borisom, je o 10 kg väčší než Cyrilov príspevok, a aritmetický priemer toho, čo nazbieral Adam s Cyrilom, je o 3 kg menší než Borisov príspevok. Určte rozdiel medzi aritmetickým priemerom toho, čo nazbierali Boris s Cyrilom, a Adamovým príspevkom.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Označme hmotnosť v kilogramoch Adamových gaštanov a, Borisových b a Cyrilových c. Podľa zadania potom platí $\frac{a+b}{2} = c + 10$ a $\frac{a+c}{2} = b - 3$. Našou úlohou je nájsť $\frac{b+c}{2} - a$, toto číslo označme x.

Zo vzťahu $\frac{a+b}{2} = c + 10$ máme $a + b = 2(c + 10)$ čiže $a = 2(c + 10) - b$ a zo vzťahu $\frac{a+c}{2} = b - 3$ máme $a + c = 2(b - 3)$ čiže $a = 2(b - 3) - c$. Porovnaním týchto dvoch vzťahov dostávame:

$$2(c + 10) - b = 2(b - 3) - c,$$
$$2c + 20 - b = 2b - 6 - c,$$
$$3c + 26 = 3b,$$
$$c + \frac{26}{3} = b.$$

Potom

$$a = 2(c + 10) - \left(c + \frac{26}{3}\right) = 2c + 20 - c - \frac{26}{3} = c + \frac{60}{3} - \frac{26}{3} = c + \frac{34}{3}.$$

Z toho dostávame

$$x = \frac{\left(c + \frac{26}{3}\right) + c}{2} - \left(c + \frac{34}{3}\right) = \frac{2c + \frac{26}{3}}{2} - c - \frac{34}{3} = c + \frac{13}{3} - c - \frac{34}{3} = -\frac{21}{3} = -7.$$

Táto situácia naozaj môže nastať, a to napríklad v prípade, keď Adam nazbiera $\frac{34}{3}$ kilogramov, Boris $\frac{26}{3}$ kilogramov, a Cyril 0 kilogramov. Priemer Adamovho a Borisovho príspevku je potom 10 kilogramov, čo je naozaj o 10 viac než Cyrilov príspevok, a priemer Adamovho a Cyrilovho príspevku je potom $\frac{17}{3}$ kilogramov, čo je naozaj o 3 menej než Borisov príspevok.

Hľadaný rozdiel je teda -7 kilogramov.

Poznámka:

K hľadanému rozdielu sa vieme dopracovať aj elegantnejšie: Sčítaním vzťahov $\frac{a+b}{2} = c + 10$, $\frac{a+c}{2} = b - 3$ a $\frac{b+c}{2} = a + x$ dostávame:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2} = (c + 10) + (b - 3) + (a + x),$$
$$a + b + c = a + b + c + 10 + (-3) + x,$$
$$0 = 0 + 10 + (-3) + x,$$
$$-7 = x.$$

Aj pri tomto postupe však treba ukázať, že situácia zo zadania naozaj môže nastať, no nájsť nejaký vyhovujúci príklad, ako vidieť, nie je triviálne.

2 Jana si vymyslela 2022-miestne číslo a jeho ciferný súčet pošepkala Petrovi. Peter vypočítal ciferný súčet čísla, ktoré mu povedala Jana, a výsledok pošepkal Zuzke. Zuzka tiež vypočítala ciferný súčet čísla, ktoré dostala od Petra, a výsledok, ktorým bolo dvojmiestne číslo, pošepkala Adamovi. Adam urobil to isté s číslom od Zuzky a vyšiel mu ciferný súčet 1. Ktoré čísla mohol pošepkať Peter Zuzke? Určte všetky možnosti.

(Iveta Jančigová)

Riešenie:

Číslo, ktoré Peter dostal od Jany, čiže ciferný súčet jej vymysleného čísla je najviac $2022 \cdot 9$ čiže 18198, má teda najviac 5 cifier. Ak je toto číslo päťciferné, tak jeho ciferný súčet nepresahuje $1 + 8 + 3 \cdot 9$ čiže 36, a ak je najviac štvorciferné, tak jeho ciferný súčet nepresahuje $4 \cdot 9$ čiže opäť 36. Číslo, ktoré Peter pošepkal Zuzke, je teda najviac 36.

Na druhej strane číslo, ktoré Zuzka pošepkala Adamovi (čo je ciferný súčet čísla, ktoré Peter pošepkal Zuzke), je podľa zadania dvojciferné a má ciferný súčet 1. Také číslo je jediné, a to 10.

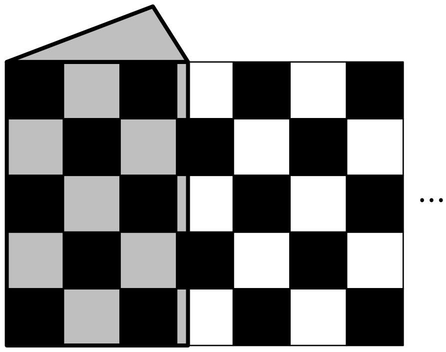
Zhrnutím oboch odsekov tak dostávame, že číslo, ktoré Peter pošepkal Zuzke, je najviac 36 a má ciferný súčet 10. Môže to teda byť len 19 alebo 28. Obe tieto čísla pritom skutočne možno dosiahnuť:

- Ak si Jana vymyslela napríklad číslo
$$1\,\underbrace{999\ldots9}_{22\times}\underbrace{000\ldots0}_{1999\times},$$
jeho ciferný súčet, ktorý pošepkala Petrovi, je $1 + 22 \cdot 9 + 1999 \cdot 0$ čiže 199, takže Peter pošepkal Zuzke jeho ciferný súčet $1 + 9 + 9$ čiže 19.
- Ak si Jana vymyslela napríklad číslo
$$1\,\underbrace{999\ldots9}_{222\times}\underbrace{000\ldots0}_{1799\times},$$
jeho ciferný súčet, ktorý pošepkala Petrovi, je $1 + 222 \cdot 9 + 1799 \cdot 0$ čiže 1999, takže Peter pošepkal Zuzke jeho ciferný súčet $1 + 9 + 9 + 9$ čiže 28.

Peter teda mohol pošepkať Zuzke číslo 19 alebo 28.

---

3 Je daný pravidelný trojboký hranol s podstavnou hranou dĺžky 3,2 cm a výškou 5 cm. Jeho plášť omotávame šachovnicovou fóliou, ktorá pozostáva z nepriehľadných a priehľadných štvorcových polí so stranami dĺžky 1 cm. Začiatok fólie lícuje s hranou hranola (pozri obrázok) a jej dĺžka vystačí práve na dvojnásobné omotanie celého plášťa.

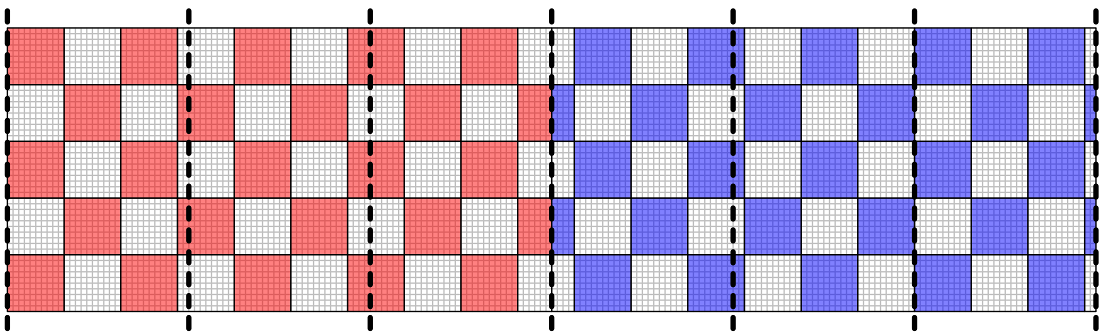


Koľko percent plášťa hranola bude po omotaní viditeľných cez fóliu? Hrúbku fólie zanedbajte.

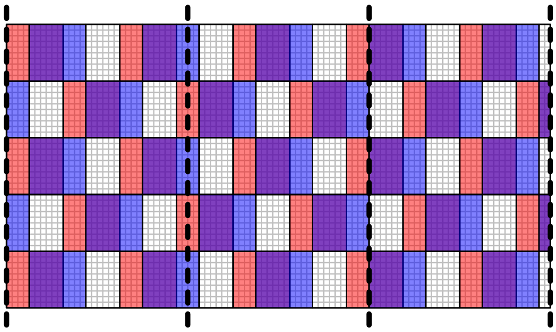
(Karel Pazourek)

Riešenie:

Prvý okruh prefarbime na červeno, druhý na modro, prerušované čiary označujú zlom fólie na bočných hranách hranola:



Teraz prvý a druhý okruh prekryme:



Ako vidieť, nepokrytých ostalo $4+5+4+5+4$ čiže 22 obdĺžnikov rozmerov $0{,}6\,\text{cm}\times 1\,\text{cm}$ a 3 obdĺžniky rozmerov $0{,}2\,\text{cm}\times 1\,\text{cm}$, ich celkový obsah je teda $22\cdot 0{,}6\,\text{cm}\cdot 1\,\text{cm} + 3\cdot 0{,}2\,\text{cm}\cdot 1\,\text{cm}$ čiže $13{,}8\,\text{cm}^2$.

Celkový obsah plášťa je $3\cdot 3{,}2\,\text{cm}\cdot 5\,\text{cm}$ čiže $48\,\text{cm}^2$, takže pomer priehľadných častí je $\frac{13{,}8\,\text{cm}^2}{48\,\text{cm}^2}$, čo je 28,75 percent.

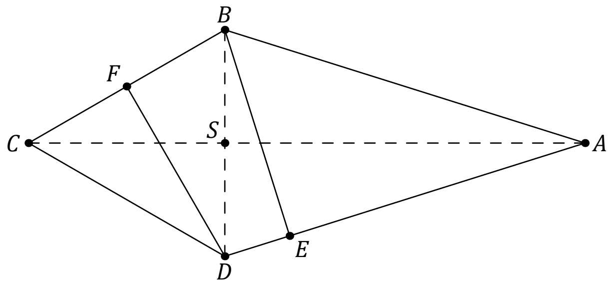
---

4 Konvexný štvoruholník $ABCD$ so stranou AB dĺžky 5 cm, so stranou BC dĺžky 3 cm a s uhlom BCD veľkosti 60° je súmerný podľa uhlopriečky AC. Bod E je pätou kolmice z vrcholu B na stranu AD a F je pätou kolmice z vrcholu D na stranu BC. Určte obvod a obsah štvoruholníka $DEBF$.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Nech S je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$.



Keďže body B a D sú súmerné podľa osi AC, trojuholník BDC je rovnoramenný so základňou BD, a pretože navyše uhol BCD má veľkosť 60°, je rovnostranný. Jeho strana BC má dĺžku 3 cm, preto jeho výška DF má dĺžku $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm a úsečky BF a DS ako polovice jeho strán BC a DB majú dĺžky 1,5 cm.

Trojuholníky DEB a DSA sú pravouhlé a navyše majú spoločný uhol EDB čiže SDA, preto sú (podľa vety *uu*) podobné. To znamená, že $\frac{|DE|}{|DB|} = \frac{|DS|}{|DA|} = \frac{1{,}5\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = \frac{3}{10}$, a teda $|DE| = \frac{3}{10}\,|DB| = \frac{3}{10}\cdot 3\,\text{cm} = 0{,}9\,\text{cm}$. Podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku DBE platí

$$|EB| = \sqrt{|DB|^2 - |DE|^2} = \sqrt{(3\,\text{cm})^2 - (0{,}9\,\text{cm})^2} = \sqrt{9\,\text{cm}^2 - 0{,}81\,\text{cm}^2} = \sqrt{8{,}19\,\text{cm}^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{819}}{10}\,\text{cm} = \frac{3}{10}\sqrt{91}\,\text{cm}.$$

Potom

$$\mathrm{o}(DEBF) = |DE| + |EB| + |BF| + |FD| = 0{,}9\,\text{cm} + \frac{3}{10}\sqrt{91}\,\text{cm} + 1{,}5\,\text{cm} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} \doteq 7{,}86\,\text{cm}$$

a

$$\mathrm{S}(DEBF) = \mathrm{S}(DEB) + \mathrm{S}(BFD) = \frac{1}{2}\cdot|DE|\cdot|EB| + \frac{1}{2}\cdot|BF|\cdot|FD| =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 0{,}9\,\text{cm}\cdot\frac{3}{10}\sqrt{91}\,\text{cm} + \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\,\text{cm}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} \doteq 3{,}24\,\text{cm}^2.$$

Poznámka:

Dĺžky strán EB a DE môžeme vypočítať aj s využitím vzorca na výpočet obsahu trojuholníka ABD, v ktorom poznáme dĺžky strán DB a $|AD|$, a dĺžku AS vieme určiť z Pytagorovej vety, keďže je to výška v rovnoramennom trojuholníku ABD:

$$|AS| = \sqrt{|AD|^2 - |DS|^2} = \sqrt{(5\text{cm})^2 - \left(\frac{3}{2}\text{cm}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}\text{cm}.$$

Potom platí

$$S(ABD) = \frac{|AS| \cdot |DB|}{2} = \frac{|AD| \cdot |EB|}{2}.$$

Odtiaľ

$$|EB| = \frac{|AS| \cdot |DB|}{|AD|} = \frac{\frac{\sqrt{91}}{2}\text{cm} \cdot 3\text{cm}}{5\text{cm}} = \frac{3\sqrt{91}}{10}\text{cm}.$$

Potom

$$|DE| = \sqrt{|DB|^2 - |EB|^2} = \sqrt{(3\text{cm})^2 - \left(\frac{3\sqrt{91}}{10}\text{cm}\right)^2} = \frac{9}{10}\text{cm}.$$

---

5 Vodník Gebuľa nakupoval v obchode, kde ceny všetkého tovaru boli uvedené v celých šupinkách. Keby Gebuľa kúpil 2 raky, 3 škeble a 1 šťuku, zaplatil by 49 šupiniek. Ak by prikúpil ešte 5 rakov, 11 škeblí a 1 šťuku, platil by celkovo 154 šupiniek. Koľko šupiniek by platil za 1 raka, 2 škeble a 3 šťuky? Určte všetky možnosti.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Označme v šupinkách x cenu jedného raka, y cenu jednej škeble a z cenu jednej šťuky. Podľa zadania sú to celé čísla, a to zrejme kladné.

Uvedené podmienky potom môžeme prepísať do rovníc $2x+3y+1z = 49$ a $(2+5)x+(3+11)y+(1+1)z = 154$ čiže $7x + 14y + 2z = 154$.

Zdvojnásobením vzťahu $2x + 3y + 1z = 49$ dostávame $4x + 6y + 2z = 98$ a po jeho odčítaní od vzťahu $7x + 14y + 2z = 154$ máme $3x + 8y = 56$.

Z toho dostávame $3x = 56-8y = 8(7-y)$, takže číslo $3x$ musí byť deliteľné 8, a keďže čísla 3 a 8 sú nesúdeliteľné, x musí byť deliteľné 8.

Zároveň však $y \geq 1$, z čoho $8y \geq 8$, a teda $56 = 3x + 8y \geq 3x + 8$, z čoho $48 \geq 3x$, t. j. $16 \geq x$.

Zhrnutím oboch odsekov dostávame, že $x = 8$ alebo $x = 16$. Rozoberme oba prípady:

- Nech $x = 8$.
  Potom

  $$3 \cdot 8 + 8y = 56,$$
  $$24 + 8y = 56,$$
  $$8y = 32,$$
  $$y = 4,$$

  z čoho

  $$2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 1z = 49,$$
  $$16 + 12 + z = 49,$$
  $$z = 21.$$

  A naozaj, v takom prípade 2 raky stoja $2 \cdot 8$ čiže 16 šupiniek, 3 škeble $3 \cdot 4$ čiže 12 šupiniek a 1 šťuka 21 šupiniek, čo je spolu $16 + 12 + 21$ čiže 49 šupiniek. Dokúpených 5 rakov stojí $5 \cdot 8$ čiže 40 šupiniek, 11 škeblí $11 \cdot 4$ čiže 44 šupiniek a 1 šťuka spomínaných 21 šupiniek, čo je spolu $40 + 44 + 21$ čiže 105 šupiniek, a to je celkovo $49 + 105$ čiže 154 šupiniek.

  Za 1 raka, 2 škeble a 3 šťuky by potom platil $1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 21$ čiže 79 šupiniek.
- Nech $x = 16$.
  Potom

  $$3 \cdot 16 + 8y = 56,$$
  $$48 + 8y = 56,$$
  $$8y = 8,$$
  $$y = 1,$$

  z čoho

$$2 \cdot 16 + 3 \cdot 1 + 1z = 49,$$
$$32 + 3 + z = 49,$$
$$z = 14.$$

A naozaj, v takom prípade 2 raky stoja $2 \cdot 16$ čiže 32 šupiniek, 3 škeble $3 \cdot 1$ čiže 3 šupinky a 1 šťuka 14 šupiniek, čo je spolu $32 + 3 + 14$ čiže 49 šupiniek. Dokúpených 5 rakov stojí $5 \cdot 16$ čiže 80 šupiniek, 11 škeblí $11 \cdot 1$ čiže 11 šupiniek a 1 šťuka spomínaných 14 šupiniek, čo je spolu $80 + 11 + 14$ čiže 105 šupiniek, a to je celkovo $49 + 105$ čiže 154 šupiniek.

Za 1 raka, 2 škeble a 3 šťuky by potom platil $1 \cdot 16 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 14$ čiže 60 šupiniek.

Poznámka:

Ak pripustíme aj nákup za 0 eur, tak nám pribudne možnosť $x = 0$. Potom $3 \cdot 0 + 8y = 56$, a teda $y = 7$, z čoho $2 \cdot 0 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot z = 49$, a teda $z = 28$.

A naozaj, v takom prípade 2 raky stoja $2 \cdot 0$ čiže 0 šupiniek, 3 škeble $3 \cdot 7$ čiže 21 šupiniek a 1 šťuka 28 šupiniek, čo je spolu $0 + 21 + 28$ čiže 49 šupiniek. Dokúpených 5 rakov stojí $5 \cdot 0$ čiže 0 šupiniek, 11 škeblí $11 \cdot 7$ čiže 77 šupiniek a 1 šťuka spomínaných 28 šupiniek, čo je spolu $0 + 77 + 28$ čiže 105 šupiniek, a to je celkovo $49 + 105$ čiže 154 šupiniek.

Za 1 raka, 2 škeble a 3 šťuky by potom platil $1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 28$ čiže 98 šupiniek.

---

6 Sú dané dve rôzne čísla. Ak od oboch odčítame štvrtinu menšieho z nich, dostaneme čísla, z ktorých jedno bude päťkrát väčšie než druhé. Koľkokrát je dané väčšie číslo väčšie než to menšie?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Menšie číslo označme x a väčšie y. Po odčítaní štvrtiny x od oboch dostávame $x - \frac{1}{4}x$ čiže $\frac{3}{4}x$ a $y - \frac{1}{4}x$. Podľa zadania potom nastáva jeden z prípadov:

- Nech $5 \cdot \frac{3}{4}x = y - \frac{1}{4}x$.

  Potom platí:

$$\frac{15}{4}x = y - \frac{1}{4}x,$$
$$\frac{15}{4}x + \frac{1}{4}x = y,$$
$$\frac{16}{4}x = y,$$
$$4x = y.$$

  Väčšie číslo je teda 4-krát väčšie než to menšie.

  Tento prípad naozaj môže nastať, stačí zvoliť čísla 1 a 4. Po odčítaní $\frac{1}{4}$ čiže 0,25 od oboch dostávame čísla 0,75 a 3,75, takže druhé je naozaj 5-krát väčšie než prvé.

- Nech $\frac{3}{4}x = 5 \cdot (y - \frac{1}{4}x)$.

  Potom platí:

$$\frac{3}{4}x = 5y - \frac{5}{4}x,$$
$$\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 5y,$$
$$\frac{8}{4}x = 5y,$$
$$2x = 5y,$$
$$\frac{2}{5}x = y.$$

  Väčšie číslo je teda (paradoxne) $\frac{2}{5}$-krát väčšie než to menšie.

  Tento prípad naozaj môže nastať, stačí zvoliť čísla -5 a -2. Po odčítaní $\frac{1}{4} \cdot (-5)$ čiže $-1{,}25$ od oboch dostávame čísla $-3{,}75$ a $-0{,}75$, takže prvé je naozaj 5-krát väčšie než druhé.
