MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie C

1 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žiaci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do pätíc, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Označme n celkový počet žiakov v záhrade. Podľa zadania vieme, že keď sa žiaci rozdelili do trojíc, tak jeden zvýšil. Matematicky to znamená, že $3 \mid n-1$.

Ďalej vieme, že po rozdelení zvyšných $n-1$ žiakov do štvoríc opäť jeden zvýšil, takže $4 \mid (n-1)-1 = n-2$.

Podobne dostaneme a zapíšeme aj tretiu zadanú podmienku $5 \mid n-3$.

Naším cieľom je dokázať, že za týchto podmienok platí $6 \mid n-4$. Na to stačí dať dohromady výsledky dvoch pozorovaní:

- Pretože číslo $n-1$ je deliteľné tromi, je deliteľné tromi aj číslo $(n-1)-3$ čiže $n-4$.
- Pretože číslo $n-2$ je deliteľné štyrmi, je párne, a tak aj číslo $(n-2)-2$ čiže $n-4$ je párne.

Vidíme, že číslo $n-4$ je deliteľné dvomi aj tromi, a tak je deliteľné šiestimi, t. j. platí $6 \mid n-4$, ako sme mali dokázať.

Poznámka:

Všimnime si, že v našom riešení sme nevyužili podmienku $5 \mid n-3$. Ani deliteľnosť štyrmi z podmienky $4 \mid n-2$ sme nevyužili naplno – vystačili sme s jej dôsledkom $2 \mid n-2$. Kvôli zaujímavosti teraz odvoďme všetky možné počty žiakov v záhrade, teda tie prirodzené čísla n, ktoré spĺňajú podmienky $3 \mid n-1$, $4 \mid n-2$ a $5 \mid n-3$.

Podmienka $3 \mid n-1$ znamená, že $n = 3k+1$ pre niektoré celé číslo k. Dosadením do podmienky $4 \mid n-2$ dostaneme $4 \mid 3k-1$, čo vďaka $4 \mid 4k$ nastane práve vtedy, keď $4 \mid 4k-(3k-1) = k+1$. To znamená, že $k = 4l+3$ pre niektoré celé číslo l, takže

$$n = 3k+1 = 3(4l+3)+1 = 12l+10.$$

Napokon dosadením do podmienky $5 \mid n-3$ dostaneme $5 \mid 12l+7$, čo vďaka $5 \mid 10l+5$ zjednodušíme na $5 \mid (12l+7)-(10l+5) = 2(l+1)$. Keďže čísla 2 a 5 sú nesúdeliteľné, po ďalšom zjednodušení máme $5 \mid l+1$, preto $l = 5m+4$ pre nejaké celé číslo m. Vychádza tak

$$n = 12l+10 = 12(5m+4)+10 = 60m+58.$$

Aj keď sme postupovali tak, že skúška nájdených n nie je nutná, presvedčme sa, že číslo $60m+58$ spĺňa podmienky $3 \mid n-1$, $4 \mid n-2$ a $5 \mid n-3$ pre každé celé m. Plynie to z vyjadrení $n-1 = 3(20m+19)$, $n-2 = 4(15m+14)$ a $n-3 = 5(12m+11)$. Dodajme, že aby bolo číslo $60m+58$ kladné, číslo m musí byť nezáporné.

Došli sme k záveru, že možné počty žiakov v záhrade sú čísla $60m+58$, kde m je nezáporné celé číslo. Najrealistickejší je asi ten najmenší možný počet 58.

2 Určte všetky štvorice rôznych dvojmiestnych prirodzených čísel, pre ktoré zároveň platí:

(i) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 2, je 80.
(ii) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 3, je 90.
(iii) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 5, je 60.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Uvažujme ľubovoľnú vyhovujúcu štvoricu. Všimnime si predovšetkým, že žiadny z troch popísaných súčtov nemôžeme dostať ako „súčet“ jediného čísla, lebo číslo 80 neobsahuje číslicu 2, číslo 90 neobsahuje číslicu 3 a číslo 60 neobsahuje číslicu 5.

Podľa zadania majú čísla obsahujúce číslicu 5 súčet 60. Už sme zdôvodnili, že je to súčet aspoň dvoch čísel. Viac než dve čísla to však byť nemôžu, pretože platí:

- Žiadne z nich nemôže mať číslicu 5 na mieste desiatok, inak by sme mali súčet aspoň $50 + 15$, čo je viac než 60.
- Keby naopak mali všetky sčítané čísla číslicu 5 na mieste jednotiek, ich súčet by musel byť aspoň $15 + 25 + 35$, čo je tiež viac než 60.

Tým pádom súčet 60 vznikol ako súčet práve dvoch čísel, pričom obe majú číslicu 5 na mieste jednotiek. Tieto dve čísla sú teda zrejme buď 15 a 45, alebo 25 a 35. Ukážeme, že prvá možnosť je vylúčená.

Pripusťme teda, že v našej štvorici sú (prvé dve) čísla 15 a 45. Žiadne z nich neobsahuje číslicu 2, preto požadovaný súčet 80 majú práve zvyšné dve čísla. Podobne pre číslicu 3 usúdime, že súčet dvoch zostávajúcich čísel musí byť nie 80, ale 90. Získaný spor ukazuje, že vo štvorici sú druhé dve čísla 25 a 35.

Všimnime si teraz, že pre čísla 25 a 35 naše súčty 80 ani 90 nie sú súčtami práve dvoch čísel, pretože druhé sčítance by museli byť $80 - 25$, resp. $90 - 35$, t. j. v oboch prípadoch 55. Potom by však nesedel súčet 60 všetkých čísel s číslicou 5 (ktorý je, ako už vieme, dosiahnutý ako $25 + 35$).

Tým pádom je súčet 80 rovnako ako súčet 90 nutne súčtom troch čísel z našej štvorice – štyri čísla to nemôžu byť pre zastúpené čísla 25 a 35. Zostávajúca dve čísla obsahujú teda obe ako číslicu 2, tak číslicu 3. Nutne preto ide o čísla 23 a 32, takže naša štvorica musí byť zložená z čísel 25, 35, 23, 32. Treba však ešte overiť, že táto štvorica má požadované súčty 80 a 90 (o súčte 60 to už vieme). Skutočne, platí $25 + 23 + 32 = 80$ a $35 + 23 + 32 = 90$.

Poznámka:

Obmenou nášho postupu riešenia ukážeme, že štvorica vyhovujúca zadaniu úlohy zostane jediná, aj keď nebudeme vyžadovať, aby bola tvorená navzájom rôznymi číslami.

Predpoklad o rôznosti čísel sme prvýkrát využili pri riešení otázky, či číslo 60 môže byť vyjadrené ako súčet troch alebo štyroch čísel s číslicou 5 na mieste jednotiek. To sa ľahko vylúči aj v prípade, keď čísla nie sú nutne rôzne. Skutočne, súčet troch čísel končiacich sa číslicou 5 sa tiež končí číslicou 5, súčet štyroch takých čísel je rovný 60, len keď ide o čísla 15, 15, 15, 15. Taká štvorica však zadaniu nevyhovuje.

Druhýkrát (a naposledy) sme predpoklad o rôznosti čísel využili pri dôkaze tvrdenia, že čísla 25, 35 musia byť doplnené o čísla 23, 32. Vo všeobecnejšej situácii je nutné vylúčiť, že doplňujúce čísla sú 23, 23 alebo 32, 32. To je však zrejmé.

---

3 Vnútri strany BC trojuholníka ABC sú dané body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, vnútri strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojuholník ohraničený úsečkami AE, GD, BF. Dokážte, že pomer obsahu tohto trojuholníka a obsahu trojuholníka ABC má jedinú možnú hodnotu, a určte ju.

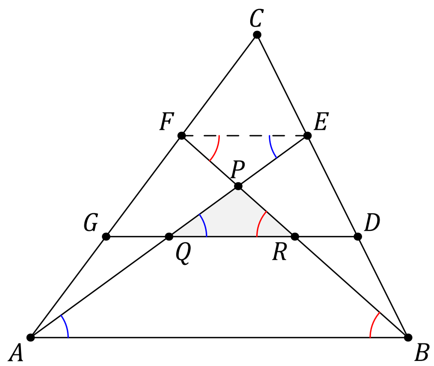
(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Nech $c = |AB|$ a $v = |C, AB|$. Vrcholy vymedzeného trojuholníka označme P, Q, R ako na obrázku.

Trojuholníky ABC a FEC so spoločným uhlom pri vrchole C sú podobné podľa vety *sus* s koeficientom podobnosti $|CF| / |CA|$ čiže $|CE| / |CB|$ rovným $1/3$, takže platí $EF \parallel AB$, $|EF| = |AB| / 3 = c/3$ a $|C, EF| = |C, AB| / 3 = v/3$. Z posledného vzťahu plynie, že vzdialenosť rovnobežiek AB a EF je rovná $2v/3$.

Podobne z podobnosti trojuholníkov ABC a GDC s koeficientom $|CG| / |CA|$ čiže $|CD| / |CB|$ rovným $2/3$ vyplýva, že $DG \parallel AB$ a $|GD| = 2 \cdot |AB| / 3 = 2c/3$. Dokázaná rovnobežnosť troch úsečiek AB, DG a EF znamená zhodnosť uhlov, ktoré sú na obrázku vyznačené rovnakými farbami.



Vidíme, že trojuholníky PAB a PEF sú podobné podľa vety *uu*, a to s koeficientom podobnosti $|EF| / |AB|$ rovným (ako už vieme) $1/3$. Tým pádom platí $\frac{|P,EF|}{|P,AB|} = \frac{1}{3}$, pričom

$$|P, EF| + |P, AB| = |E, AB| = \frac{2v}{3}.$$

Odtiaľ ľahko vychádza $|P, EF| = v/6$ (a tiež $|P, AB| = v/2$, čo využijeme až v poznámke za riešením).

Všimnime si teraz, že bod G je stred úsečky AF. Keďže $GQ \parallel EF$, GQ je stredná priečka trojuholníka AEF. Podobne RD je stredná priečka trojuholníka BEF. Z toho dostávame

$$|QR| = |GD| - |GQ| - |RD| = |GD| - \frac{|EF|}{2} - \frac{|EF|}{2} = |GD| - |EF| = \frac{2c}{3} - \frac{c}{3} = \frac{c}{3} = |EF|.$$

Trojuholníky PQR a PEF sú tak zhodné podľa vety *usu*. Hľadaný obsah PQR je preto rovný obsahu PEF, ktorý už ľahko určíme:

$$\mathrm{S}(PEF) = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |P, EF| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{v}{6} = \frac{1}{18} \cdot \frac{cv}{2} = \frac{1}{18} \cdot \mathrm{S}(ABC).$$

Hľadaný pomer obsahov trojuholníkov PQR a ABC je pre ľubovoľný východiskový trojuholník ABC rovnaký, a to $1 : 18$.

Poznámka:

Použitie vety *usu* v dôkaze zhodnosti trojuholníkov PQR a PEF je možné nahradiť konštatovaním, že $QREF$ je rovnobežník, lebo jeho protiľahlé strany QR a EF sú rovnobežné a zhodné.

Ukážme, že dokonca nie je nutné trojuholník PEF vôbec uvažovať. Namiesto toho je možné po výpočte $|QR| = c/3$ ešte priamo vypočítať $|P, QR| = v/6$. Na to stačí využiť podobnosť trojuholníkov PAB a PQR s koeficientom $|QR| \,/\, |AB|$ rovným $1/3$. Podľa nej totiž máme $|P, QR| = |P, AB| \,/3 = v/6$, lebo hodnotu $|P, AB|$ čiže $v/2$ sme už v riešení určili.

---

4 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný nule a zároveň súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný nule. Určte najväčší možný súčet všetkých čísel v tabuľke.

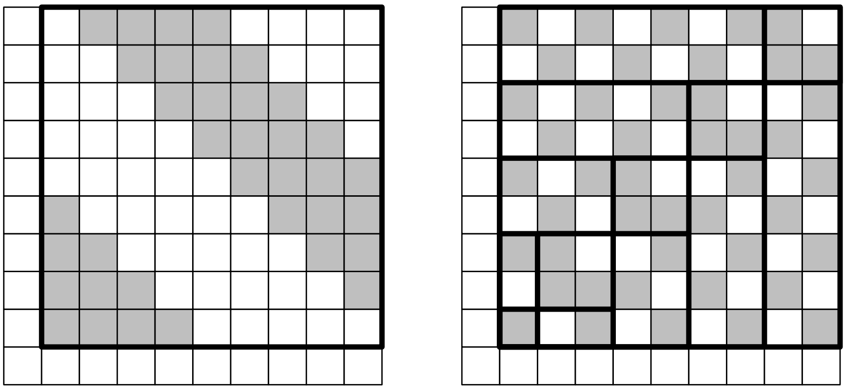
(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Ak sčítame všetky čísla uvažovanej tabuľky po riadkoch, dôjdeme k záveru, že celkový súčet je rovný súčtu čísel v tom výnimočnom riadku, kde sa nerovná nule. Tento súčet je najviac 10, pričom sa rovná 10, ak sú v dotyčnom riadku samé jednotky. (K rovnakému záveru dôjdeme aj pri sčítaní všetkých čísel tabuľky po stĺpcoch.)

Ak teraz uvedieme príklad vyplnenej tabuľky 10×10, ktorá spĺňa zadanie a v ktorej je súčet všetkých čísel skutočne rovný 10, budeme s riešením úlohy hotoví. Vieme, že v takej tabuľke musia byť v jednom riadku aj v jednom stĺpci samé jednotky. Umiestnime ich do prvého stĺpca zľava a do posledného riadku zhora. Potom je našou úlohou vyplniť zvyšný štvorec 9×9 (v pravom hornom rohu tabuľky) číslami 1 a -1 tak, aby v každom jeho riadku aj stĺpci bolo práve 5-krát číslo -1 (a teda 4-krát číslo 1).

Nasledujúce obrázky ukazujú dva z možných spôsobov, ako popísanú úlohu splniť. Kvôli prehľadnosti nie sú v tabuľkách 10×10 uvedené zapisované čísla. Namiesto toho sú políčka s číslom 1 biele (ako je to napr. v celom prvom stĺpci a v celom poslednom riadku), políčka s číslami -1 sú vyfarbené.



V ľavom obrázku je využitá tradičná konštrukcia s „cyklickým posúvaním“ ofarbenej skupiny polí po riadkoch „zvyšnej“ tabuľky 9×9. Pravý obrázok je tiež zostavený nie skusmo, ale použitím všeobecnej metódy, ktorej hovoríme *matematická indukcia*. (Základné poučenie o tejto metóde nájdete v brožúre *Matematická indukce* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/404193) zo Školy mladých matematikov.) Spôsob postupného vyfarbovania pochopíme, keď si prezrieme časti 1×1, 3×3, 5×5 a 7×7 v ľavom dolnom rohu dotyčnej tabuľky 9×9.

Najväčší možný súčet všetkých čísel v tabuľke je 10.

---

5 Je daný rovnostranný trojuholník ABC a vnútri jeho strany AB bod D. Na polpriamke opačnej k BC zostrojme bod E taký, že $|CD| = |DE|$. Dokážte, že platí $|AD| = |BE|$.

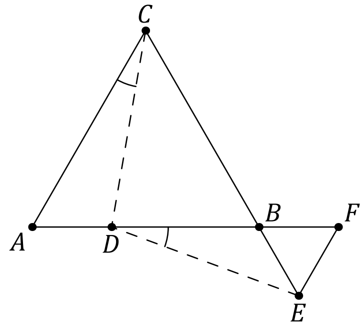
(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Nech $\varphi = |\sphericalangle ACD|$. Pretože $|\sphericalangle ACB| = 60°$, uhol DCE má veľkosť $60° - \varphi$. To je uhol pri základni CE rovnoramenného trojuholníka CDE, takže platí aj $|\sphericalangle CED| = 60° - \varphi$. Teraz z trojuholníka BDE máme

$$|\sphericalangle BDE| = 180° - |\sphericalangle DBE| - |\sphericalangle BED| = 180° - 120° - (60° - \varphi) = \varphi.$$

Tak sme dokázali, že uhly ACD a EDB sú zhodné, ako je vyznačené na obrázku.

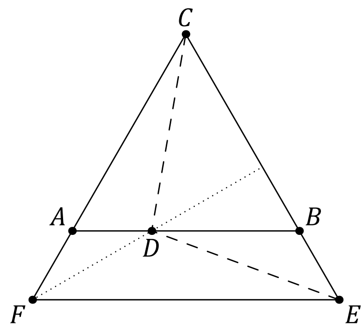


Všimnime si teraz trojuholníky CAD a DBE. Tie síce nie sú zhodné, ale majú nielen zhodné uhly pri vrcholoch C a D, ale tiež zhodné strany CD a DE (podľa zadania), avšak pre ich uhly pri vrcholech A a B platí $|\sphericalangle CAD| = 60°$ a $|\sphericalangle DBE| = 120°$. To nás motivuje k tomu, aby sme na predĺžení strany DB za krajný bod B zostrojili pomocný bod F tak, aby platilo $|FE| = |BE|$, a teda $|\sphericalangle EFB| = |\sphericalangle EBF| = 60°$. Potom totiž bude trojuholník CAD zhodný s trojuholníkom DFE podľa vety *usu*, lebo tieto trojuholníky majú zhodné strany CD a DE, rovnaký uhol φ pri vrcholoch C a D, rovnaký uhol $60°$ pri vrcholoch A a F, a teda aj rovnaký uhol pri tretích vrcholoch D a E, ako obvyklá formulácia vety *usu* vyžaduje.

Zhodnosť trojuholníkov CAD a DFE už rýchlo vedie k dokazovanému tvrdeniu. Plynie z nej totiž, že $|AD| = |FE|$, avšak podľa konštrukcie bodu F máme $|FE| = |BE|$, takže dohromady dostávame $|AD| = |BE|$, čo sme mali dokázať.

Riešenie 2:

Máme dokázať zhodnosť úsečiek AD a BE, premiestnime teda jednu z nich na iné miesto. (Aj v prvom riešení sme vlastne vybrali úsečku BE a otočili ju okolo bodu E do polohy FE, aj keď sme to takto nepopísali.) Skúsme preto premiestniť úsečku BE do polohy AF, kde F leží na polpriamke opačnej k polpriamke AC tak, že $|AF| = |BE|$. Potom bude stačiť dokázať, že trojuholník ADF je rovnoramenný s hlavným vrcholom A.

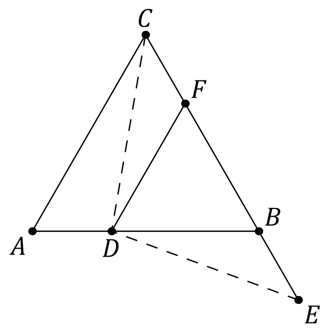


Z rovností $|AF| = |BE|$ a $|AC| = |BC|$ plynie $|CF| = |CE|$, takže trojuholník CFE je rovnoramenný, a vďaka vnútornému uhlu ECF veľkosti $60°$ je dokonca rovnostranný.

Podľa zadania platí rovnosť $|DC| = |DE|$. Bod D teda leží na osi strany CE rovnostranného trojuholníka CFE. Táto os, ako je známe, prechádza jeho vrcholom F, a to tak, že rozpoľuje vnútorný uhol CFE, ktorý má veľkosť $60°$. Platí teda $|\sphericalangle AFD| = 30°$, čo vzhľadom na $|\sphericalangle DAF| = 120°$ znamená, že $|\sphericalangle ADF| = 30°$. Trojuholník ADF je teda skutočne rovnoramenný, ako sme chceli dokázať.

Riešenie 3:

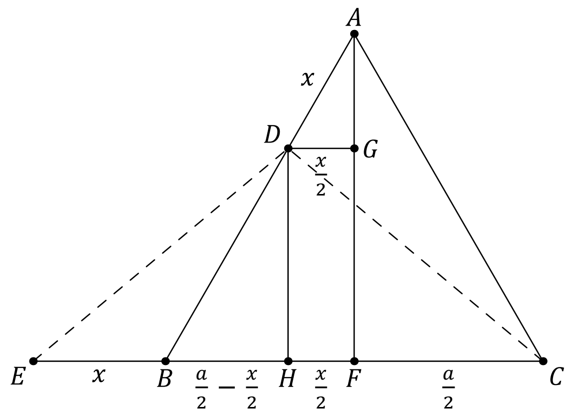
Podobne ako v druhom riešení premiestnime jednu z úsečiek AD, BE inam. Tentokrát vezmeme úsečku AD a premiestnime ju do polohy CF, kde bod F leží na úsečke BC tak, že $|CF| = |AD|$.



Z rovností $|AD| = |CF|$ a $|AB| = |BC|$ plynie $|BD| = |BF|$, takže trojuholník BFD je rovnoramenný, a vďaka vnútornému uhlu DBF veľkosti 60° je dokonca rovnostranný, preto platí $|DB| = |DF|$. To spolu s $|DE| = |DC|$ a $|\sphericalangle DBE| = 120° = |\sphericalangle DFC|$ vedie k záveru, že trojuholníky DBE a DFC sú zhodné podľa vety *Ssu*. Platí preto $|BE| = |FC| = |AD|$.

Riešenie 4:

Uvedieme ešte jeden postup, ku ktorému nás môže inšpirovať ďalší obrázok, na ktorom má rovnostranný trojuholník ABC vodorovnú základňu BC a vrchol A „nad ňou". Budeme totiž počítať so vzdialenosťami bodov od zvislej výšky AF trojuholníka ABC.



Okrem päty F výšky AF, ktorá je stredom základne BC, sme na obrázku ešte vyznačili kolmé priemety G a H bodu D postupne na úsečky AF a BC. Všimnime si trojuholník ADG: ten je pravouhlý a vďaka zrejmej rovnobežnosti $DG \parallel BC$ má pri vrchole D uhol veľkosti 60°. Je známe, že v takom trojuholníku je prepona dvakrát dlhšia než odvesna, ktorá zviera uhol veľkosti 60° s preponou. (Ak je totiž D' obraz D v súmernosti podľa stredu G, je ADD' rovnostranný trojuholník a bod G je stred jeho základne DD', takže $|AD| = |DD'| = 2\,|DG|$.) Ak $x = |AD|$, tak platí $|DG| = x/2$.

Z pravouholníka $HFGD$ vidíme, že $|HF| = |DG| = x/2$. Ak $a = |BC|$, tak $|FC| = |FB| = a/2$ a $|HB| = |FB| - |HF| = a/2 - x/2$. Z predpokladu $|DC| = |DE|$ plynie, že bod H je stred základne EC rovnoramenného trojuholníka DEC. Vďaka tomu máme $|HE| = |HC| = |HF| + |FC| = x/2 + a/2$, odkiaľ už dostávame

$$|BE| = |HE| - |HB| = \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) = x = |AD|\,,$$

čo sme mali dokázať.

---

6 Určte všetky možné hodnoty súčtu $a + b + c + d$, kde a, b, c, d sú kladné celé čísla spĺňajúce rovnosť

$$\left(a^2 - b^2\right)\left(c^2 - d^2\right) + \left(b^2 - d^2\right)\left(c^2 - a^2\right) = 2021.$$

(Mária Dományová, Patrik Bak)

Riešenie:

Ľavú stranu zadanej rovnice roznásobme a ďalej upravujme:

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = (a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2) + (b^2c^2 - a^2b^2 - c^2d^2 + a^2d^2) =$$

$$= a^2c^2 + b^2d^2 - a^2b^2 - c^2d^2 = a^2(c^2 - b^2) + d^2(b^2 - c^2) = (a^2 - d^2)(c^2 - b^2) = (a - d)(a + d)(c - b)(c + b).$$

Rovnica zo zadania je teda ekvivalentná s rovnicou $(a - d)(a + d)(c - b)(c + b) = 2021 = 43 \cdot 47$. Čísla a, b, c, d sú kladné celé, takže oba činitele $a + d$ a $c + b$ z ľavej strany rovnice sú celé čísla väčšie než 1. Pretože však

43 a 47 sú prvočísla, ich súčin je deliteľný súčinom dvoch čísel väčších než 1, len keď ide o samotné čísla 43 a 47. Naša rovnica tak môže byť splnená jediným spôsobom: $\{a+d, c+b\} = \{43, 47\}$ a $(a-d)(c-b) = 1$. Nutne teda platí $a+b+c+d = 90$. Ak ukážeme, že čísla a, b, c, d splňujúce zadanie úlohy existujú, budeme s riešením hotoví.

Skúsme napríklad zaistiť splnenie rovnice takto: $a+d = 43$, $a-d = 1$ a zároveň $c+b = 47$, $c-b = 1$. Ľahko zistíme, že vyhovuje (jediná) štvorica (a, b, c, d), a to $(22, 23, 24, 21)$. Súčet $a+b+c+d$ má tak jedinú možnú hodnotu 90.

Poznámka:

Náš postup môžeme doplniť o zistenie všetkých štvoríc, ktoré vyhovujú zadaniu úlohy. Pretože podmienka $(a-d)(c-b) = 1$ znamená buď $a-d = c-b = 1$, alebo $a-d = c-b = -1$, hľadáme všetky riešenia štyroch sústav rovníc:

- $a+d = 43$, $a-d = 1$, $c+b = 47$, $c-b = 1$.
- $a+d = 47$, $a-d = 1$, $c+b = 41$, $c-b = 1$.
- $a+d = 43$, $a-d = -1$, $c+b = 47$, $c-b = -1$.
- $a+d = 47$, $a-d = -1$, $c+b = 43$, $c-b = -1$.

Každá z týchto sústav má jediné riešenie (a, b, c, d), sú to postupne štvorice $(22, 23, 24, 21)$, $(24, 21, 22, 23)$, $(21, 24, 23, 22)$, $(23, 22, 21, 24)$ (všetky, samozrejme, so súčtom 90).