

2010/2011
60. ročník MO

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z6

1. Pani Hundravá mala 1. júla 2010 na svojom mobile kredit 3,14 €. Z kreditu sa postupne odpočítavajú čiastky za hovory a to tak, že za každú začatú minútu sa odčíta 9 centov. Textové správy pani Hundravá nepíše a nevyužíva ani žiadne ďalšie platené služby. Svoj kredit dobíja podľa potreby a to vždy sumou 8 €. Dňa 31. decembra 2010 bol jej kredit 7,06 €. Koľkokrát minimálne dobíjala pani Hundravá za uvedený polrok svoj kredit? (L. Šimůnek)

Riešenie. Suma v centoch, ktorú pani Hundravá prevolala v období od 1. 7. do 31. 12., je celé číslo. Za každú začatú minútu sa účtuje 9 centov, a preto celá prevolaná suma za uvedené obdobie je bezo zvyšku deliteľná číslom deväť.

Keďže počiatkový kredit je menší ako konečný, musela pani Hundravá počas sledovaného obdobia aspoň raz dobíjať. Keby dobíjala len raz, prevolaná suma by bola $314 + 800 - 706 = 408$ centov. Podľa ciferného súčtu čísla 408 vidíme, že to nie je násobok deviatich, a tak túto možnosť zavrhuje. Keby dobíjala dvakrát, prevolaná suma by bola o 800 centov väčšia, teda 1208 centov. Túto možnosť zavrhuje, pretože ani 1208 nie je násobok deviatich. Podobne zamietneme aj možnosť troch dobití vedúcu k sume 2008 centov. Ak by dobíjala štyrikrát, prevolaná suma by bola 2808 centov. To je možné, pretože 2808 je násobkom deviatich. Pani Hundravá teda počas sledovaného obdobia dobíjala minimálne štyrikrát.

Iné riešenie. Je zrejmé, že pani Hundravá dobíjala svoj kredit aspoň raz. V tabuľke budeme postupne uvažovať o rôznych počtoch dobíjaní: vždy určíme prevolanú sumu za sledované obdobie a koľkým minútam táto suma prislúcha. Budeme pokračovať tak dlho, kým počet účtovaných minút nevyjde celé číslo.

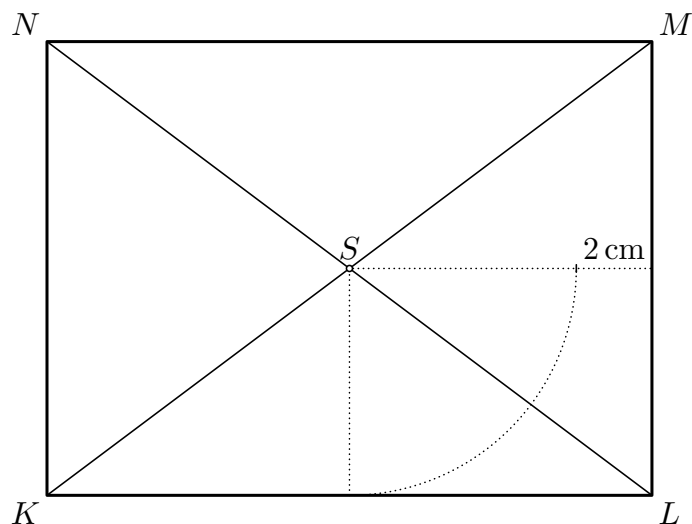
počet dobíjaní	provolaná suma v centoch	počet účtovaných minút
1	$314 + 800 - 706 = 408$	$408 : 9 \doteq 45,3$
2	$314 + 2 \cdot 800 - 706 = 1\,208$	$1\,208 : 9 \doteq 134,2$
3	$314 + 3 \cdot 800 - 706 = 2\,008$	$2\,008 : 9 \doteq 223,1$
4	$314 + 4 \cdot 800 - 706 = 2\,808$	$2\,808 : 9 = 312$

Pani Hundravá počas sledovaného obdobia dobíjala minimálne štyrikrát.

Návrh hodnotenia. 4 body za preverenie možností 408, 1 208, 2 008, 2 808; 1 bod za vysvetlenie, prečo možnosti zamietame; 1 bod za správny záver.

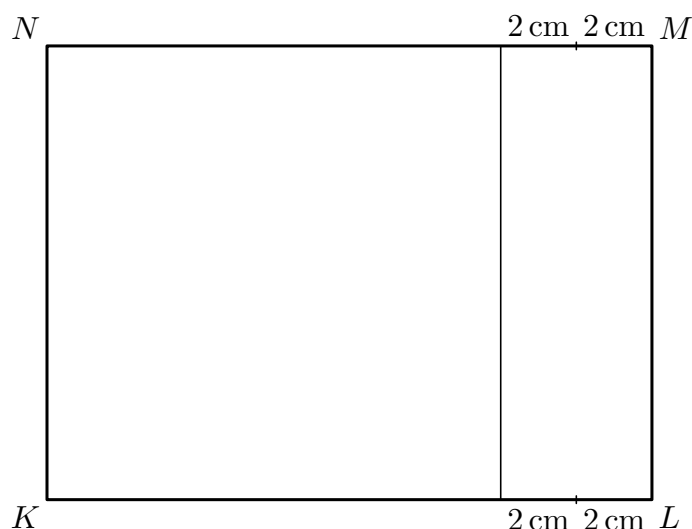
2. V obdĺžniku $KLMN$ je vzdialenosť priesečníka jeho uhlopriečok od priamky KL o 2 cm menšia ako jeho vzdialenosť od priamky LM . Obvod obdĺžnika je 56 cm. Aký je obsah obdĺžnika $KLMN$? (L. Hozová)

Riešenie. Priesečník uhlopriečok v obdĺžniku $KLMN$ označme S . Ak je vzdialenosť bodu S od strany KL o 2 cm menšia ako od strany LM , znamená to, že strana KL je o $2 + 2 = 4$ (cm) dlhšia ako strana LM (obr. 1).



Obr. 1

Ak teda skrátime dĺžku obdĺžnika (t.j. strany KL a MN) o 4 cm, získame tak štvorec, ktorého strana je rovnaká ako šírka pôvodného obdĺžnika (obr. 2). Tento štvorec má obvod $56 - 2 \cdot 4 = 48$ (cm).



Obr. 2

Strana štvorca, a teda aj strany LM a NK obdĺžnika merajú $48 : 4 = 12$ (cm). To znamená, že strany KL a MN merajú $12 + 4 = 16$ (cm). Obsah obdĺžnika je preto $S = 16 \cdot 12 = 192$ (cm²).

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie vzťahov medzi stranami KL a LM ; 2 body za určenie veľkostí strán KL a LM pomocou obvodu; 2 body za určenie obsahu obdĺžnika.

3. V lete sa u babičky stretlo všetkých jej šesť vnúčat. O vnúčatách nám babička prezradila, že

- Martinka sa niekedy musí starať o bračeka Tomáška, ktorý je o 8 rokov mladší,
- Vierka, ktorá je o 7 rokov staršia ako Ivana, rada rozpráva strašidelné príbehy,
- s Martinkou sa často hašterí o rok mladší Jaromír,

- Tomáško je o 11 rokov mladší ako Katka,
- Ivana často hnevá svojho o 4 roky staršieho brata Jaromíra,
- chlapci majú dokopy 13 rokov.

Koľko rokov majú jednotlivé deti?

(M. Volfová)

Riešenie. Martinka je o 8 rokov staršia ako Tomáško a o 1 rok staršia ako Jaromír, Jaromír je teda o 7 rokov starší ako Tomáško. Navyše chlapci majú dokopy 13 rokov. Keby bol Tomáško o 7 rokov starší (teda rovnako starý ako Jaromír), spolu by mali 20 rokov. Jaromír má teda 10 rokov a Tomáško 3 roky.

Z toho už ľahko dopočítame vek ostatných vnúčat: Martinka je o 8 rokov staršia ako Tomáško, má teda 11 rokov; Katka je o 11 rokov staršia ako Tomáško, čiže má 14 rokov; Jaromír je o 4 roky starší ako Ivana, ktorá má preto 6 rokov; napokon, Vierka je o 7 rokov staršia od Ivany a musí mať 13 rokov.

Návrh hodnotenia. 3 body za určenie vekov oboch chlapcov (z toho 1 bod je za uvedenie postupu); 3 body za určenie vekov štyroch vnučiek (z toho 1 bod je za uvedenie postupu).

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete (s dodržaním označenia umiestnenia podľa pravidla: „Ak práve n žiakov dosiahlo viac bodov ako žiak X a práve m žiakov vrátane X dosiahlo rovnako veľa bodov ako X , tak žiakovi X patrí v poradí miesto s označením $(n + 1) - (n + m)$., prípadne skráteno len $(n + 1)$. miesto.“).