**2010/2011**
**60. ročník MO** *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z7*

---

**1.** *Mám kartičku, na ktorej je napísané štvorciferné prirodzené číslo. V tomto čísle môžeme vyškrtnúť akékoľvek dve cifry a vždy dostaneme dvojciferné prirodzené číslo, ktoré je bezo zvyšku deliteľné číslom* 5. *Koľko takých štvorciferných prirodzených čísel existuje? (Pozor, napr.* 06 *nie je dvojciferné číslo!)* (L. Šimůnek)

**Riešenie.** Cifry vyhovujúceho štvorciferného čísla označme takto: $v$ je na mieste tisícok, $x$ na mieste stoviek, $y$ na mieste desiatok a $z$ na mieste jednotiek. Prirodzené číslo je deliteľné piatimi práve vtedy, keď má na mieste jednotiek cifru 0 alebo 5. Po vyškrtnutí dvoch cifier z pôvodného čísla sa na miesto jednotiek môžu dostať cifry $x$, $y$ alebo $z$, preto tieto cifry môžu byť jedine 0 alebo 5. Podľa zadania dostaneme po vyškrtnutí hociktorých dvoch cifier dvojciferné číslo. Takto vzniknuté číslo môže mať na mieste desiatok cifry $v$, $x$ alebo $y$, tieto cifry teda nemôžu byť 0.

Zhrnutím oboch predošlých poznatkov dostávame, že cifra $v$ môže byť rovná ľubovoľnej cifre od 1 do 9, cifry $x$ a $y$ môžu byť jedine 5 a cifra $z$ môže byť 0 alebo 5. Spolu tak existuje $9 \cdot 2 = 18$ štvorciferných čísel vyhovujúcich zadaniu.

*Návrh hodnotenia.* 1 bod za poznatok, že po škrtaní sa na miesto jednotiek dostávajú cifry $x$, $y$, $z$; 1 bod za podmienku $v, x, y \neq 0$; 1 bod za zistenie, že $x$ a $y$ je 5; 1 bod za poznatok, že $z$ je 0 alebo 5; 1 bod za počet možností pre cifru $v$; 1 bod za výsledok 18.

Žiaka ohodnoťte plným počtom bodov, aj keď stanoví podmienky a potom dôjde k počtu 18 vypísaním všetkých vyhovujúcich čísel. Riešenie, v ktorom sú vypísané všetky možnosti bez akéhokoľvek komentára, ohodnoťte nanajvýš 4 bodmi.

---

**2.** *Karol a Vojto zistili, že kuchynské hodiny na chalupe každú hodinu nadbehnú o 1,5 minúty a hodiny v spálni každú hodinu pol minúty meškajú. Druhého apríla na pravé poludnie nastavili hodiny na rovnaký a správny čas. Urči, kedy opäť budú (bez ďalšieho opravovania)*

- *kuchynské hodiny ukazovať správny čas;*
- *hodiny v spálni ukazovať správny čas;*
- *oboje hodiny ukazovať rovnaký (aj keď nie nutne správny) čas.*

*(Hodiny v kuchyni aj v spálni majú dvanásťhodinový ciferník.)* (M. Volfová)

**Riešenie.** Hodiny v kuchyni budú ukazovať presný čas, keď predbehnú skutočný čas o 12, 24, 36, … hodín. Prvý raz to bude vtedy, keď predbehnú skutočný čas o 12 hodín, čiže o 720 minút. To dosiahnu za $720 : 1{,}5 = 480$ hodín. Kuchynské hodiny budú opäť ukazovať presný čas za 480 hodín (čo je presne 20 dní), t. j. na poludnie 22. apríla.

Hodiny v spálni budú ukazovať opäť presný čas, keď sa oproti skutočnému času omeškajú o 12 hodín, čiže o 720 minút. To sa im „podarí“ za $720 : 0{,}5 = 1\,440$ hodín. Hodiny v spálni budú opäť ukazovať presný čas za 1 440 hodín (čo je presne 60 dní), teda na poludnie 1. júna.

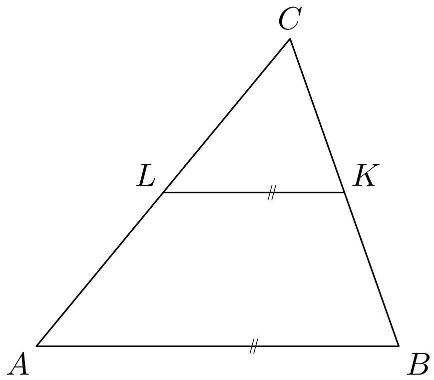
Každú hodinu sa rozdiel času, ktorý ukazujú kuchynské hodiny, oproti času, ktorý ukazujú hodiny v spálni, zvýši o $1{,}5 + 0{,}5 = 2$ minúty. Tento rozdiel musí postupne dosiahnuť 720 minút, a to sa stane za $720 : 2 = 360$ hodín. Oboje hodiny budú opäť ukazovať rovnaký čas za 360 hodín (čo je presne 15 dní), čiže na poludnie 17. apríla.

*Návrh hodnotenia.* Každá časť úlohy je za 2 body, z ktorých je vždy 1 bod za zdôvodnenie. Ak žiak uvedie ako odpoveď aj násobky uvedených intervalov (t. j. uvažuje všetky, nie iba najbližšie udalosti, kedy opísaný stav nastane), body nestŕhajte. Takisto body neuberajte, ak žiak nenapíše presné dátumy, ale odpoveď uvedie iba v hodinách alebo dňoch, ktoré majú uplynúť od poludnia 2. apríla.

---

**3.** *V trojuholníku $ABC$ označíme stredy strán $CB$ a $CA$ písmenami $K$ a $L$. Vieme, že štvoruholník $ABKL$ má obvod* 10 cm *a trojuholník $KLC$ má obvod* 6 cm*. Vypočítaj dĺžku úsečky $KL$.* (J. Mazák)

**Riešenie.** Úsečka $KL$ je v trojuholníku $ABC$ strednou priečkou rovnobežnou s $AB$, lebo $K$ a $L$ sú stredy strán $BC$ a $AC$. Platí teda $2|KL| = |AB|$ a tiež vieme, že $|AL| = |LC|$ a $|CK| = |KB|$ (obr. 1).




Obr. 1

Obvod trojuholníka $KLC$ je $|CK|+|KL|+|LC| = 6$. Obvod štvoruholníka $ABKL$ je

$$|AB| + |BK| + |KL| + |LA| = 10.$$

Súčet na ľavej strane práve uvedenej rovnosti môžeme podľa predchádzajúcich pozorovaní vyjadriť ako $2|KL| + (|CK| + |KL| + |LC|)$, čiže $2|KL| + 6$. Rovnosť tak získava tvar

$$2|KL| + 6 = 10,$$

odkiaľ dostávame $2|KL| = 4$, t. j. $|KL| = 2$ (cm).

*Návrh hodnotenia.* 2 body za zistenie a zdôvodnenie, že $|AB| = 2|KL|$; 2 body za úvahy o obvodoch; 2 body za výpočet $|KL|$.

*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*

*Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.*

*Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.*

*Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO:* skmo.sk*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete (s dodržaním označenia umiestnenia podľa pravidla: „Ak práve $n$ žiakov dosiahlo viac bodov ako žiak $X$ a práve $m$ žiakov vrátane $X$ dosiahlo rovnako veľa bodov ako $X$, tak žiakovi $X$ patrí v poradí miesto s označením $(n+1).–(n+m).$, prípadne skrátene len $(n+1).$ miesto.“).*