2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z8*

1. *Myslím si dvojciferné prirodzené číslo. Súčet cifier tohto čísla je deliteľný tromi. Keď odčítam od mysleného čísla číslo 27, dostanem iné dvojciferné prirodzené číslo, zapísané pomocou tých istých cifier, ale v opačnom poradí. Aké čísla si môžem myslieť?*
(*L. Hozová*)

Riešenie. Cifry mysleného dvojciferného čísla označme takto: x je na mieste desiatok a y na mieste jednotiek. V zadaní sa požaduje, aby súčet $x + y$ bol deliteľný tromi a

$$10x + y - 27 = 10y + x,$$

čo po úprave dáva

$$9x - 9y = 27,$$
$$x - y = 3.$$

Keďže rozdiel cifier má byť tri a súčasne súčet má byť deliteľný tromi, musia byť aj obe cifry x a y deliteľné tromi. (To hneď vidíme, keď súčet cifier $x + y$ vyjadríme v tvare $y + 3 + y$.) Jediné možnosti teda sú $x = 9$, $y = 6$ alebo $x = 6$, $y = 3$, t. j. hľadané číslo môže byť 96 alebo 63. (Možnosť 30 nie je prípustná, lebo 03 nie je dvojciferné prirodzené číslo.)

Návrh hodnotenia. 1 bod za zápis čísla a čísla s opačným poradím cifier; 2 body za nájdenie vzťahu $x - y = 3$; 2 body za určenie jedného riešenia; 1 bod za určenie druhého riešenia. (Ak žiak uvádza ako riešenie číslo 30, na bodové ohodnotenie jeho práce to nemá žiadny vplyv.)

Iné riešenie. Hľadané číslo je väčšie ako to, ktoré získame zámenou cifier, takže cifra na mieste jednotiek hľadaného čísla má nižšiu hodnotu ako cifra na mieste desiatok. Navyše vieme, že súčet týchto dvoch cifier je deliteľný tromi. Prejdeme teda všetky dvojciferné čísla, ktoré majú ciferný súčet deliteľný tromi a cifru na mieste desiatok vyššiu ako cifru na mieste jednotiek (na mieste jednotiek samozrejme nemôže byť nula). Ku každému nájdeme číslo o 27 menšie, a ak je zapísané tými istými ciframi, máme riešenie.

$96 - 27 = 69$	1. riešenie
$93 - 27 = 66$	
$87 - 27 = 60$	
$84 - 27 = 57$	
$81 - 27 = 54$	
$75 - 27 = 48$	
$72 - 27 = 45$	
$63 - 27 = 36$	2. riešenie
$54 - 27 = 27$	
$51 - 27 = 24$	
$42 - 27 = 15$	
$21 - 27 = -6$	

Hľadaným číslom môže byť 96 alebo 63.

Návrh hodnotenia. 3 body za vysvetlenie princípu hľadania čísel; 3 body za nájdenie oboch riešení a vylúčenie existencie ďalších riešení.

---

2. *Martina si vymyslela postup na výrobu číselnej postupnosti. Začala číslom* 52. *Z neho odvodila ďalší člen postupnosti takto:* $2^2 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$. *Potom pokračovala rovnakým spôsobom ďalej a z čísla* 14 *dostala* $4^2 + 2 \cdot 1 = 16 + 2 = 18$. *Vždy teda vezme číslo, odtrhne z neho cifru na mieste jednotiek, túto odtrhnutú cifru umocní na druhú a k výslednej mocnine pripočíta dvojnásobok čísla, ktoré ostalo po odtrhnutí poslednej cifry. Aké je* 2011. *číslo takto vytvorenej postupnosti?* (*M. Dillingerová*)

Riešenie. Je zrejmé, že ak sa objaví v postupnosti niektoré číslo druhýkrát, bude sa opakovať celý úsek ohraničený dvoma výskytmi čísla stále dokola. Budeme teda vypisovať čísla postupnosti tak dlho, kým sa niektoré nezopakuje.

- 1. číslo: 52,
- 2. číslo: 14,
- 3. číslo: 18,
- 4. číslo: $8^2 + 2 \cdot 1 = 66$,
- 5. číslo: $6^2 + 2 \cdot 6 = 48$,
- 6. číslo: $8^2 + 2 \cdot 4 = 72$,
- 7. číslo: $2^2 + 2 \cdot 7 = 18$,
- 8. číslo: $8^2 + 2 \cdot 1 = 66$,
- atď.

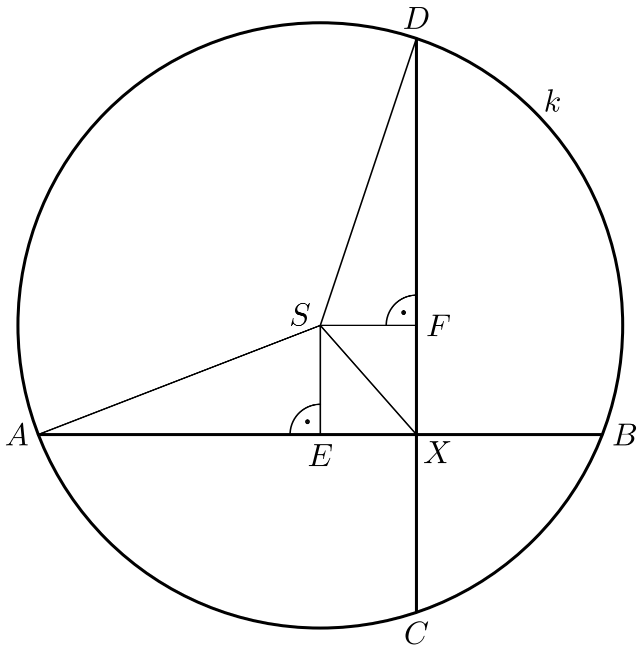
Od tretieho čísla sa v postupnosti pravidelne opakujú čísla 18, 66, 48 a 72. Číslo 18 je teda na 3., 7., 11., 15., 19., 23. mieste, atď. Toto číslo sa bude vyskytovať aj na každom mieste, ktoré sa od ktoréhokoľvek už uvedeného miesta líši o nejaký násobok štyroch. Keďže $2011 = 11 + 500 \cdot 4$, bude číslo 18 aj na 2011. mieste.

Návrh hodnotenia. 3 body za nájdenie čísel, ktoré sa opakujú; 1 bod za zistenie, že 2011. číslo je 18; 2 body za vysvetlenie, prečo je na 2011. mieste práve toto číslo.

---

3. *V kružnici k so stredom S a polomerom* 52 mm *sú dané dve na seba kolmé tetivy AB a CD. Ich priesečník X je od stredu S vzdialený* 25 mm. *Aká dlhá je tetiva CD, ak dĺžka tetivy AB je* 96 mm*?* (*L. Hozová*)

Riešenie. Stredy tetív AB a CD označme E a F (obr. 1). Trojuholníky AES, EXS a SFD sú pravouhlé, $|AE| = \frac{1}{2}|AB| = 48\,\text{mm}$, $|SX| = 25\,\text{mm}$ a $|SA| = |SD| = 52\,\text{mm}$.



Obr. 1

Podľa Pytagorovej vety v trojuholníku AES dostávame

$$|SE|^2 = |SA|^2 - |AE|^2 = 52^2 - 48^2 = 2\,704 - 2\,304 = 400\,(\mathrm{mm}^2).$$

Podľa Pytagorovej vety v trojuholníku EXS dostávame

$$|EX|^2 = |SX|^2 - |SE|^2 = 25^2 - 400 = 625 - 400 = 225\,(\mathrm{mm}^2).$$

Keďže $EXFS$ je obdĺžnik, platí $|SF| = |EX|$; podľa Pytagorovej vety v trojuholníku SFD tak dostávame

$$|FD|^2 = |SD|^2 - |SF|^2 = 52^2 - 225 = 2\,704 - 225 = 2\,479\,(\mathrm{mm}^2).$$

Odtiaľ vyjadríme $|FD| = \sqrt{2\,479} \doteq 49{,}79$, príp. $|FD| \doteq 50\,(\mathrm{mm})$, ak pracujeme s presnosťou na celé mm. Tetiva CD je teda dlhá presne $2\sqrt{2\,479}$ mm a približne 100 mm.

Návrh hodnotenia. 1 bod za určenie $|AE|$; 1 bod za určenie $|SE|$; 1 bod za určenie $|EX|$; 1 bod za určenie $|SF|$; 1 bod za určenie $|FD|$; 1 bod za určenie $|CD|$.

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete (s dodržaním označenia umiestnenia podľa pravidla: „Ak práve n žiakov dosiahlo viac bodov ako žiak X a práve m žiakov vrátane X dosiahlo rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí miesto s označením $(n+1)$. – $(n+m)$., prípadne skrátene len $(n+1)$. miesto.“).*