

2009/2010
59. ročník MO

Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1, \\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1, \\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

(Radek Horenský)

Riešenie. Ľavé strany daných rovníc majú (ako odmocniny) nezáporné hodnoty, preto z pravých strán vyplývajú postupne nerovnosti $z \geq 1$, $x \geq 1$ a $y \geq 1$.

Odmocnín v rovniciach sa zbavíme ich umocnením:

$$x^2 - y = (z - 1)^2, \quad y^2 - z = (x - 1)^2, \quad z^2 - x = (y - 1)^2,$$

umocnené rovnice sčítame a výsledok sčítania upravíme:

$$\begin{aligned}(x^2 - y) + (y^2 - z) + (z^2 - x) &= (z - 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2, \\ (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) &= (z^2 + x^2 + y^2) - 2(z + x + y) + 3, \\ x + y + z &= 3.\end{aligned}$$

Keďže však z nerovností $x \geq 1$, $y \geq 1$ a $z \geq 1$ vyplýva sčítaním $x + y + z \geq 3$, môže byť rovnosť $x + y + z = 3$ splnená jedine tak, že $x = y = z = 1$. Skúškou dosadením sa presvedčíme, že trojica $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je naozaj riešením (jediným, ako vyplýva z nášho postupu).

Dodajme, že ak si nerovnosti $x, y, z \geq 1$ na začiatku nevšimneme, avšak vzťah $x + y + z = 3$ po sčítaní umocnených rovníc odvodíme, môžeme potom určenú hodnotu súčtu $x + y + z$ použiť pri sčítaní pôvodných (neumocnených) rovníc, a tak získať rovnicu $\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = 0$ s jasným dôsledkom: každá z odmocnín musí byť rovná nule.

Iné riešenie. Keďže pre trojice (x, y, z) , (y, z, x) a (z, x, y) vyjde sústava zadaných rovníc narovnať, stačí hľadať len také riešenia (x, y, z) , v ktorých je prvá zložka maximálna, t. j. platí $x \geq y$ a $x \geq z$.¹ Rovnako ako v pôvodnom riešení si uvedomíme, že $x, y, z \geq 1$ (ďalej nám bude stačiť iba fakt², že $x, y, z \geq 0$).

Z predpokladanej nerovnosti $x \geq z$ vyplýva pre pravé strany prvej a druhej nerovnice porovnanie $x - 1 \geq z - 1$, takže rovnakú nerovnosť musia spĺňať aj odmocniny na ľavých stranách, teda aj príslušné výrazy pod odmocninami: $y^2 - z \geq x^2 - y$, čiže $x^2 - y^2 \leq y - z$. Ľavá strana tej poslednej je nezáporná (vďaka predpokladu $x \geq y$), takže je taká aj pravá strana: $y - z \geq 0$, čiže $y \geq z$. To ešte upravíme na nerovnosť $y - 1 \geq z - 1$ medzi pravými stranami prvej a tretej rovnice, takže podľa ich ľavých strán dostaneme $z^2 - x \geq x^2 - y$, čiže $z^2 - x^2 \geq x - y$. Odtiaľ a z predpokladu $x \geq y$ máme $z^2 - x^2 \geq 0$, čiže $z \geq x$. Spolu tak platí $x \geq y \geq z \geq x$, teda musí byť $x = y = z$. Vtedy sa zadaná sústava redukuje na jedinú rovnicu $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$. Je ľahké ukázať, že jej jediné riešenie v obore reálnych čísel je $x = 1$.

¹ Nerovnosť $y \geq z$ dopredu zaručiť nemôžeme. Poradie neznámych x, y, z totiž nemôžeme meniť ľubovoľne, ale iba cyklicky.

² Budeme ho potrebovať kvôli ekvivalenciám typu $a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Riešte $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} + \sqrt{x-9} + \sqrt{x-10} = 6$ v obore reálnych čísel. [Ľavá strana má zmysel jedine vtedy, keď $x \geq 10$. Jej hodnota pre $x > 10$ je väčšia ako $\sqrt{10-1} + \sqrt{10-6} + \sqrt{10-9} = 6$, takže $x = 10$ je jediné riešenie.]
 N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{x^2 - y} = y - 1, \quad \sqrt{y^2 - x} = x - 1.$$

[Z rovníc vyplýva $x, y \geq 1$. Ďalej využite buď to, že po sčítaní umocnených rovníc dostanete $x + y = 2$, alebo vzhľadom na symetriu predpokladajte $x \geq y$ a z nerovnosti $y^2 - x \geq x^2 - y$ odvodte $y \geq x$. Jediné riešenie je $x = y = 1$.]

- D1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - z = x^2, \quad z^2 - x = y^2. \quad [57-A-S-1]$$

- D2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2), \quad y^2 + 2zx = 6(z + x - 2), \quad z^2 + 2xy = 6(x + y - 2). \quad [53-A-S-3]$$

- D3. Zistíte, pre ktoré $p \in \mathbb{R}$ má sústava rovníc

$$x^2 + 1 = (p + 1)x + py - z, \quad y^2 + 1 = (p + 1)y + pz - x, \quad z^2 + 1 = (p + 1)z + px - y$$

práve jedno riešenie v obore reálnych čísel. [51-A-S-3]

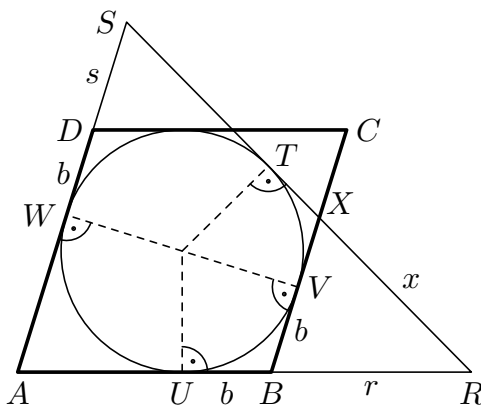
- D4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 - 1 = p(y + z), \quad y^2 - 1 = p(z + x), \quad z^2 - 1 = p(x + y).$$

s neznámymi x, y, z a parametrom p . [51-A-II-4]

2. Do kosoštvorca $ABCD$ je vpísaná kružnica. Uvažujme jej ľubovoľnú dotýčnicu pretínajúcu obe strany BC, CD a označme postupne R, S jej priesečníky s priamkami AB, AD . Dokážte, že hodnota súčinu $|BR| \cdot |DS|$ od voľby dotýčnice nezávisí. (Leo Boček)

Riešenie. Nech U, V, W, T sú body dotyku vpísanej kružnice postupne so stranami AB, BC, DA a s uvažovanou dotýčnicou RS , ktorej priesečník so stranou BC pomeňujme X (obr. 1). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné dĺžky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ premenné dĺžky závislé od voľby dotýčnice RS . Naším cieľom je ukázať, že zadaný súčin $|BR| \cdot |DS| (= r \cdot s)$ má stálu hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 1

Trojuholníky ARS , BRX sú rovnoľahlé podľa stredy R , lebo ich strany AS a BX ležia na rovnobežných priamkach. Navyše kružnica vpísaná prvému trojuholníku ARS je pripísaná strane BX druhého trojuholníka BRX . Podľa poznatku zo záveru návodnej úlohy N2 o tom, že body dotyku vpísanej a pripísanej kružnice sú súmerne združené podľa stredy strany, na ktorej oba body ležia, môžeme usúdiť, že pomeru $|SW| : |AR|$ v trojuholníku ARS zodpovedá pomer $|BV| : |BR|$ v trojuholníku BRX . To vedie na rovnosť, ktorú pri zavedenom označení zapíšeme ako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkiaľ} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tým je dôkaz hotový a úloha vyriešená.

Iné riešenie. Použijeme rovnaké označenie ako v prvom riešení. Zaobídeme sa bez výsledku úlohy N2 tak, že označíme ešte $|RX| = x$ a vyjadríme dĺžky strán oboch rovnoľahlých trojuholníkov ARS , BRX na základe triviálneho poznatku o rovnosti úsekov dotýčníc z daného bodu k danej kružnici (úloha N1). Pre trojuholník ARS je to ľahké: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b+r) + (b+s) = 2b+r+s.$$

V trojuholníku BRX máme $|BR| = r$ a dĺžku tretej strany BX vyjadríme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b+r) - x = 2b+r-x. \end{aligned}$$

Pre strany podobných trojuholníkov ARS a BRX teda platí pomer

$$(a+r) : (2b+r+s) : (a+s) = r : x : (2b+r-x).$$

Odtiaľ môžeme eliminovať x a potom objaviť závislosť $rs = ab$. Namiesto takého postupu si však všimnime, že obvod druhého trojuholníka nezávisí od x , preto porovnáme pomery obvodu k prvej strane (od x nezávislej) v každom z oboch trojuholníkov:

$$\begin{aligned} \frac{(a+r) + (2b+r+s) + (a+s)}{a+r} &= \frac{r+x+(2b+r-x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b+s)}{a+r} &= 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs &= ab. \end{aligned}$$

Potrebná rovnosť je dokázaná.

Iné riešenie. Nech O je stred kružnice vpísanej kosoštvorcu $ABCD$ (a teda aj trojuholníku ARS). Označme α , ϱ , σ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ARS postupne pri vrcholoch A , R , S . Potom $|\angle BRO| = \frac{1}{2}\varrho$, $|\angle OBR| = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, $|\angle ROB| = 180^\circ - |\angle BRO| - |\angle OBR| = \frac{1}{2}\sigma$. Podobne $|\angle DSO| = \frac{1}{2}\sigma$, $|\angle SDO| = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, $|\angle DOS| = \frac{1}{2}\varrho$. Preto sú trojuholníky BRO a DOS podobné a odtiaľ $|BR| : |DO| = |BO| : |DS|$, čiže $|BR| \cdot |DS| = |BO| \cdot |DO| = |BO|^2$, čo je hodnota nezávislá od voľby dotýčnice.

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Dokážte rovnosť $|AT_1| = |AT_2|$, pričom T_1, T_2 sú body dotyku oboch dotýčníc vedených z bodu A k danej kružnici. [Využite osovú súmernosť alebo zhodnosť trojuholníkov AT_1S a AT_2S (pričom S je stred danej kružnice) podľa vety *Ssu*.]
- N2. Vyjadrite dĺžky všetkých úsekov, na ktoré sú strany daného trojuholníka rozdelené
- tromi bodmi dotyku kružnice vpísanej,
 - tromi bodmi dotyku kružníc pripísaných,
- pomocou dĺžok a, b, c celých (t. j. nerozdelených) strán. Z výsledku potom vypočítajte, že na každej strane trojuholníka tvoria bod dotyku z a) a bod dotyku z b) dvojicu bodov, ktoré sú súmerne združené podľa stredú príslušnej strany. [Ako úseky z časti a), tak úseky z časti b) majú dĺžky $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(b+c-a)$, $\frac{1}{2}(c+a-b)$. Vyplýva to zo sústav lineárnych rovníc, ktoré zostavíte na základe poznatku z úlohy N1, použitom vždy na dotýčnice zo všetkých troch vrcholov trojuholníka k danej (vpísanej či jednej pripísanej) kružnici.]
- N3. Kružnica vpísaná dotýčnicovému lichobežníku $ABCD$ sa dotýka základní AB, CD postupne v bodoch E, F . Dokážte rovnosť $|AE| \cdot |DF| = |BE| \cdot |CF|$. [Základne AB a CD určujú spolu s priesečníkom predĺžených ramien BC, AD dva rovnolahlé trojuholníky, pritom kružnica vpísaná väčšiemu z nich je pripísaná základni menšieho trojuholníka. Z poznatkov z úlohy N2 a úmernosti dĺžok strán oboch trojuholníkov už vyplýva rovnosť pomerov $|AE| : |BE|$ a $|CF| : |DF|$.]
- D1. Do jedného konvexného uhla sú vpísané dve nepretínajúce sa kružnice. Ich spoločná vnútorná dotýčnica s bodmi dotyku K, L pretína ramená uhla v bodoch A, B . Dokážte rovnosť $|AK| = |BL|$. [Dôsledok N2 – uvažte vzťah oboch kružníc k trojuholníku ABV , pričom V je vrchol daného uhla. Alebo priamo: Nech úsečka AB je rozdelená bodmi K, L na úseky postupne dĺžok x, y, z . Použitím N1 odvodte, že vzdialenosti bodov dotyku oboch kružníc na jednotlivých ramenách sú $2x + y$, resp. $2z + y$. Z N1 však vyplýva $2x + y = 2z + y$, t. j. $x = z$.]
- D2. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB . Na jeho výške CD je zvolený bod P tak, že kružnice vpísané trojuholníku ABP a štvoruholníku $PECF$ sú zhodné; pritom bod E je priesečník priamky AP so stranou BC a F priesečník priamky BP so stranou AC . Dokážte, že aj kružnice vpísané trojuholníkom ADP a BCP sú zhodné. [49–A–III–2]

3. Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme na tabuli dve čísla, z ktorých jedno je deliteľom druhého, obe zotrieme a na tabuľu napíšeme ich (celočíselný) podiel. Takto pokračujeme, kým na tabuli nezostanú iba čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľom iného. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich číslom 1.) Najmenej koľko čísel môže na tabuli zostať?

(Peter Novotný)

Riešenie. Na tabuli zrejme budú stále len čísla z množiny $M = \{1, 2, \dots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budú napísané stále, a to každé jedenkrát, pretože nemajú žiadneho deliteľa rôzneho od 1 a množina M ani neobsahuje žiadny ich násobok (takže nikdy nemôžu z tabule zmiznúť, ani sa objaviť v ďalšom exemplári).

Vysvetlíme teraz, prečo na tabuli budú okrem uvedených piatich prvočísel napísané vždy ešte niektoré dve ďalšie čísla. Súčin S všetkých čísel zapísaných na tabuli je na začiatku rovný

$$S = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31. \quad (1)$$

V každom kroku zvolíme nejakú dvojicu čísel (x, y) s vlastnosťou $x \mid y$, teda čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme ich jedným číslom $y/x = k$. Súčin všetkých čísel na tabuli sa pritom zmení z doterajšej hodnoty S na novú hodnotu S/a^2 , lebo dva činitele x, y so súčinom $xy = ka^2$ budú nahradené jedným novým činiteľom k (a ostatné činitele sa nezmenia). Je jasné, že pri zmene $S \rightarrow S/a^2$ sa exponent ľubovoľného

prvočísla p z rozkladu čísla S buď zachová (ak $p \nmid a$), alebo zmenší o párne číslo (rovné exponentu p v rozklade čísla a^2). V žiadnom prípade sa teda nezmení *parita* (párna-nepárna) exponentu žiadneho z prvočísel. Preto každé z prvočísel, ktoré malo na začiatku v rozklade (1) *nepárny* exponent, bude mať nepárny exponent v rozklade meniaceho sa S aj po ľubovoľnom počte krokov. Také sú (okrem 17, 19, 23, 29 a 31) aj prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budú stále zastúpené (nie nutne štyri rôzne) čísla, ktoré sú týmito jednotlivými štyrmi prvočíslami deliteľné. Samozrejme, nemôže to byť iba jediné číslo (lebo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musia byť aspoň dve čísla, napríklad 10 a 33 (alebo 11 a 30 alebo 15 a 22, iné možnosti pri celkovom počte siedmich čísel na tabuli neexistujú). Tak sme dokázali, že na tabuli bude naozaj vždy napísaných najmenej 7 čísel.

Ostáva popísať nejakú postupnosť krokov, po ktorej na tabuli naozaj 7 čísel zostane. Existuje veľa možností, môžeme napríklad dať „bokom“ prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a so zvyšnými číslami urobiť nasledujúce kroky:

$$\begin{aligned} 32, 16 \rightarrow 2, \quad 30, 15 \rightarrow 2, \quad 28, 14 \rightarrow 2, \quad 26, 13 \rightarrow 2, \quad 24, 12 \rightarrow 2, \quad 22, 11 \rightarrow 2, \\ 27, 9 \rightarrow 3, \quad 21, 7 \rightarrow 3, \quad 18, 6 \rightarrow 3, \quad 25, 5 \rightarrow 5, \quad 20, 4 \rightarrow 5, \quad 8, 2 \rightarrow 4, \\ 5, 5 \rightarrow 1, \quad 4, 2 \rightarrow 2, \quad 3, 3 \rightarrow 1, \quad 3, 3 \rightarrow 1, \quad 2, 2 \rightarrow 1, \quad 2, 2 \rightarrow 1, \quad 2, 2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Po týchto krokoch už je na tabuli (okrem siedmich čísel bokom) len 7 jednotiek, ktoré všetky odstránime šiestimi krokmi $1, 1 \rightarrow 1$ a posledným krokom napr. $10, 1 \rightarrow 10$.

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Určte, koľkými nulami končí dekadický zápis čísla 33!. [Siedmimi nulami. Stačí zistiť, s akými exponentmi vystupujú prvočísla 2 a 5 v rozklade daného faktoriálu na súčin prvočísel. Dá sa to urobiť konkrétnym rozborom súčinu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33$, alebo využiť známy vzťah: exponent prvočísla p v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je rovný súčtu

$$\left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots,$$

pričom $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x a sčítanie prebieha, pokiaľ mocnina p^k v menovateli zlomku neprevyšuje čitateľ n . Celý rozklad čísla 33! je uvedený v riešení súťažnej úlohy.]

- N2. Dokážte, že číslo $N = 46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49!$ nie je druhou mocninou celého čísla, a potom nájdite jeho najväčší deliteľ, ktorý je druhou mocninou celého čísla. [Číslo N nie je druhou mocninou, pretože v jeho rozklade na súčin prvočísel vystupuje prvočíslo 47 s nepárnym exponentom 3. Z vyjadrenia $N = (46!)^4 \cdot 47 \cdot (47 \cdot 48) \cdot (47 \cdot 48 \cdot 49) = (46!)^4 \cdot 47^3 \cdot (48^2) \cdot 7^2$ vyplýva, že najväčšou druhou mocninou, ktorá je deliteľom čísla N , je číslo $(46!)^4 \cdot 47^2 \cdot 48^2 \cdot 7^2 = N/47$.]
- N3. Nájdite najmenšie celé kladné n , pre ktoré existuje poradie $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ čísel $1, 2, \dots, 10$, ktoré vyhovuje rovnici

$$\frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}} = \frac{1}{n}.$$

[Hľadané n je rovné 7. Keďže $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, nedá sa zlomok na ľavej strane rovnice krátiť číslom 7, takže musí byť $n \geq 7$. Hodnote $n = 7$ zodpovedá napríklad platná rovnosť $\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{7}$.]

- N4. Na tabuli je napísaných sedem čísel $p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2$ a q^3 , pričom p a q sú dve rôzne prvočísla. Po šiestich krokoch opísaných v súťažnej úlohe zostalo na tabuli jediné číslo. Určte ho bez rozboru všetkých možných postupov, akými možno jednotlivé kroky voliť. [Posledné číslo na tabuli bude pq . Súčin všetkých čísel na tabuli je na začiatku $p^9 q^9$, a preto po každom kroku bude mať hodnotu $p^m q^n$ s nepárnymi exponentmi

m a n , ako je vysvetlené v riešení súťažnej úlohy. Pre číslo $p^m q^n$, ktoré ako jediné ostane nakoniec, navyše musí platiť $m + n \leq 3$ (ako pre každé číslo, ktoré dostaneme v priebehu vykonávania krokov), takže musí byť $m = n = 1$. Možný postup krokov: $p^3, p^2 \rightarrow p; q^3, q^2 \rightarrow q; p^2 q, p \rightarrow pq; pq^2, q \rightarrow pq; pq, pq \rightarrow 1; pq, 1 \rightarrow pq.$

- D1. V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť: a) na 8 kôpok po 251 minciach, b) na 251 kôpok po 8 minciach. [58–A–I–5]
- D2. V každom z vrcholov pravidelného n -uholníka $A_1 A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: vo vrchole A_k je to práve k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vyberieme dve mince a preložíme každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte takých preložení dosiahnuť, že pre ľubovoľné k , $1 \leq k \leq n$, bude vo vrchole A_k ležať $n + 1 - k$ mincí. [58–A–III–5]
- D3. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré možno dostať doplnením zátvoriek do výrazu

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

[48–A–I–1]

- D4. Do čitateľa aj menovateľa zlomku

$$\frac{29 : 28 : 27 : 26 : 25 : 24 : 23 : 22 : 21 : 20 : 19 : 18 : 17 : 16}{15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2}$$

môžeme opakovane vpisovať zátvorky, a to vždy na rovnaké miesta pod seba.

- a) Určte najmenšiu možnú celočíselnú hodnotu výsledného výrazu.
b) Nájdite všetky možné celočíselné hodnoty výsledného výrazu. [48–A–III–1]

4. V ľubovoľnom ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme O , V a S postupne stred kružnice opísanej, priesečník výšok a stred kružnice vpísanej. Dokážte, že os úsečky OV prechádza bodom S práve vtedy, keď jeden vnútorný uhol trojuholníka ABC má veľkosť 60° . (Tomáš Jurík)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC platí

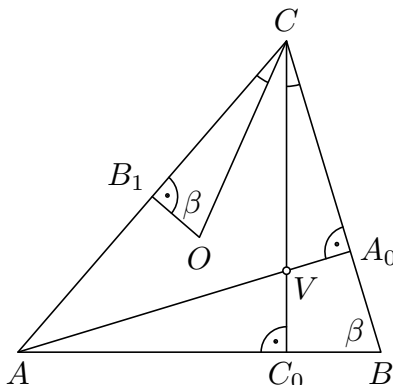
$$\gamma = 60^\circ \iff |CO| = |CV|. \quad (1)$$

Na to potrebujeme trojuholníky CVA_0 a COB_1 , pričom A_0 je päta výšky z vrcholu A a B_1 je stred strany AC (obr. 2). Z pravouhlého trojuholníka ACA_0 vyplýva

$$\gamma = 60^\circ \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Posledné je rovnosť dĺžok odvesien pravouhlých trojuholníkov CVA_0 a COB_1 , ktorých vyznačené vnútorné uhly VCA_0 a OCB_1 majú zhodnú veľkosť $90^\circ - \beta$. (Pre uhol VCA_0 to vyplýva z pravouhlého trojuholníka BCC_0 , pričom C_0 je päta výšky z vrcholu C na stranu AB , pre uhol OCB_1 to vyplýva z rovnoramenného trojuholníka ACO , ktorý má pri hlavnom vrchole O uhol 2β vďaka vete o obvodovom a stredovom uhle v opísanej

kružnici.) Preto je zhodnosť odvesien CA_0 , CB_1 ekvivalentná so zhodnosťou prepôn CO a CV , čo dokazuje (1).



Obr. 2

Teraz zapojíme do úvah stred S kružnice vpísanej. Zo spomenutej zhodnosti uhlov VCA_0 a OCB_1 vyplýva, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC je polpriamka CS nielen osou uhla ACB , ale aj osou uhla OCV . Táto os je v prípade $\gamma = 60^\circ$, kedy ako vieme $|CO| = |CV|$, osou základne OV rovnoramenného trojuholníka OVC (body O a V sú rôzne, lebo podľa zadania úlohy je trojuholník ABC rôznostranný), takže stred S naozaj leží na osi úsečky OV . Rovnako to platí aj v prípadoch $\alpha = 60^\circ$, resp. $\beta = 60^\circ$.

Pripusťme teraz, že stred S leží na osi úsečky OV , avšak žiadny z uhlov α , β , γ nie je 60° . Podľa (1) teda platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Pozrime sa znovu na trojuholník OVC , v ktorom teda os CS vnútorného uhla OCV nesplýva s osou protilahlej strany OV , takže ich jediný spoločný bod S leží na kružnici trojuholníku OVC opísanej (tento známy fakt uvádzame v úlohe N2). Inak povedané, bod C leží na kružnici opísanej trojuholníku OVS . Z rovnakých dôvodov na tejto kružnici ležia aj body A a B , takže sa jedná o kružnicu opísanú trojuholníku ABC , ktorá však nikdy svojím stredom O neprechádza. Tak sme dostali spor, ktorý ukazuje, že pripustená situácia nemôže nastať. Tým je riešenie celej úlohy ukončené.

Poznámka 1. Z druhej časti riešenia vyplýva tento poznatok: ak má uhol γ (ostrouhlého) trojuholníka ABC veľkosť 60° , ležia vrcholy A a B na jednej kružnici s priesečníkom výšok, stredom opísanej kružnice aj stredom vpísanej kružnice. Jednoduchšie zdôvodnenie uvádzame v úlohe N1.

Poznámka 2. Kľúčovú ekvivalenciu (1) z podaného riešenia možno dokázať aj trigonometricky. Platia totiž vzťahy

$$|CO| = \frac{c}{2 \sin \gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad (2)$$

podľa ktorých sú úsečky CO a CV zhodné práve vtedy, keď je uhol γ riešením rovnice $2 \sin \gamma = \operatorname{tg} \gamma$, ktorá je zrejme ekvivalentná s rovnicou $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, ktorá má na intervale $(0^\circ, 90^\circ)$ jediné riešenie $\gamma = 60^\circ$. Prvý zo vzťahov (2) vyplýva z tzv. rozšírenej sínusovej vety

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

pričom r je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC , druhým vzťahom v (2) sa zaoberáme pri úlohe D1.

Poznámka 3. Ekvivalenciu (1) z uvedeného riešenia môžeme dokázať aj bez veľkého počítania: priesečník výšok daného trojuholníka totiž vždy leží na kružnici súmerne združenej s kružnicou trojuholníku opísanou podľa priamky AB (v našom prípade). Vzhľadom na to, že taká kružnica je zároveň obrazom kružnice opísanej v posunutí o vektor CV , závisí dĺžka $|CV|$ v danej opísanej kružnici len od veľkosti tetivy AB (či zodpovedajúceho obvodového uhla), a nie od polohy bodu C . Preto rovnosť $|CV| = r = |CO|$ nastane práve vtedy, keď spomenutá združená kružnica prechádza stredom O kružnice trojuholníku opísanej, t. j. práve vtedy, keď príslušná strana leží oproti (obvodovému) uhlu veľkosti 60° .

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Dokážte, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC (pri označení O, S, V zo súťažnej úlohy) platí $|\angle AOB| = 2\gamma$, $|\angle ASB| = 90^\circ + \gamma/2$, $|\angle AVB| = 180^\circ - \gamma$. Aký dôsledok majú tieto rovnosti v prípade $\gamma = 60^\circ$? [Prvá rovnosť je vzťahom obvodového a stredového uhla, pre druhú, resp. tretiu rovnosť si uvedomte, že v trojuholníku ASB , resp. AVB majú dva vnútorné uhly veľkosti $\alpha/2$ a $\beta/2$, resp. $90^\circ - \alpha$ a $90^\circ - \beta$, a v oboch prípadoch dopočítajte tretí uhol. Keďže body O, S, V ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou AB , v prípade $\gamma = 60^\circ$ zo zhodnosti uhlov AOB, ASB, AVB (všetky tri sú 120°) vyplýva, že body A, B, O, S, V ležia na jednej kružnici.]
- N2. Dokážte, že ak strany KM a LM daného trojuholníka KLM nie sú zhodné, pretne os vnútorného uhla KML os strany KL v bode, ktorý leží na kružnici, ktorá je trojuholníku KLM opísaná. [Jednoduchšie je dokázať všeobecnejšie tvrdenie, že os vnútorného uhla pretne opísanú kružnicu v bode, ktorý má rovnakú vzdialenosť od zostávajúcich dvoch vrcholov trojuholníka. Zo zhodnosti dvoch obvodových uhlov v kružnici totiž vyplýva zhodnosť príslušných tetív.]
- N3. V rovine je daná úsečka AB . Zostrojte množinu ťažísk všetkých ostrouhlých trojuholníkov ABC , pre ktoré platí: Vrcholy A a B , priesečník výšok V a stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležia na jednej kružnici. [A-55-III-4]
- D1. Dokážte, že pre vzdialenosti priesečníka V výšok od vrcholov ostrouhlého trojuholníka ABC platia vzťahy

$$|AV| = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad |BV| = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}, \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

[Ak sú AA_0, CC_0 výšky ostrouhlého trojuholníka ABC a V ich priesečník, platí $|CA_0| = b \cos \gamma$. Pravouhlý trojuholník CA_0V má pri vrchole C uhol $90^\circ - \beta$, takže $|CA_0| = |CV| \cos(90^\circ - \beta) = |CV| \sin \beta$. Porovnaním dostaneme $b \cos \gamma = |CV| \sin \beta$, čo spolu s rovnosťou $b/\sin \beta = c/\sin \gamma$ (sínusová veta) dáva $|CV| = (b/\sin \beta) \cdot \cos \gamma = (c/\sin \gamma) \cdot \cos \gamma = c/\operatorname{tg} \gamma$. Tretí zo vzťahov je dokázaný, prvé dva platia vďaka symetrii.]

5. V nádrži je r_0 rýb, spoločný úlovok n rybárov. Prichádzajú pre svoj podiel jednotlivo. Každý si myslí, že sa dostavil ako prvý, a aby si vzal presne n -tinu aktuálneho počtu rýb v nádrži, musí predtým jednu z rýb pustiť späť do mora. Určte najmenšie možné číslo r_0 v závislosti od daného $n \geq 2$, keď aj posledný rybár si aspoň jednu rybu odnesie. (Dag Hrubý)

Riešenie. Pre každé $k = 1, 2, \dots, n$ označme r_k počet rýb v nádrži potom, ako si k -ty rybár odnesie svoj podiel. Tieto počty sú podľa zadania určené počiatočnou hodnotou r_0 a rekurentnými vzťahmi

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Zapišme ich vo výhodnom tvare

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{pričom} \quad q = \frac{n-1}{n} \quad \text{a} \quad d = \frac{1-n}{n}. \quad (1)$$

Rekurentná rovnica $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ ($q, d = \text{konšt.}$) sa vyskytuje v mnohých aplikáciách. Odvodíme preto najskôr, aké priame vyjadrenie má každý člen r_k takej postupnosti r_0, r_1, r_2, \dots pri všeobecných q, d a danej počiatkovej hodnote r_0 . Až potom sa vrátíme k našej úlohe a do výsledku dosadíme hodnoty q, d z (1).

Najprv si všimnime, že v prípade $q = 1$ dostávame rovnicu $r_{k+1} = r_k + d$, podľa ktorej je skúmaná postupnosť aritmetická s diferenciou d , takže jej všeobecný člen má vyjadrenie $r_k = r_0 + kd$. V prípade $q \neq 1$ z rekurentnej rovnice postupne dostaneme

$$\begin{aligned} r_1 &= qr_0 + d, \\ r_2 &= qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2r_0 + (q+1)d, \\ r_3 &= qr_2 + d = q(q^2r_0 + (q+1)d) + d = q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d, \\ r_4 &= qr_3 + d = q(q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Takto nachádzame vyjadrenie

$$r_k = q^k r_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1)d.$$

Ak použijeme známy vzorec pre súčet k členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q \neq 1$, dôjdeme k záveru, že pre každé $k \geq 0$ je člen r_k daný priamym vzťahom

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k - 1)d}{q - 1} = q^k \left(r_0 + \frac{d}{q - 1} \right) - \frac{d}{q - 1}.$$

V našom konkrétnom prípade platí

$$\frac{d}{q - 1} = \frac{(1 - n)/n}{(n - 1)/n - 1} = n - 1,$$

odkiaľ nachádzame vyjadrenie jednotlivých hodnôt r_k v tvare

$$r_k = \frac{(n - 1)^k (r_0 + n - 1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Vzhľadom na nesúdeliteľnosť dvojice čísel $(n - 1)^k, n^k$ sú také hodnoty r_k celočíselné práve vtedy, keď je číslo $r_0 + n - 1$ deliteľné všetkými zastúpenými mocninami n^k , z ktorých najvyššia je mocnina n^n . Hľadaná nutná aj postačujúca podmienka má preto tvar: pre niektoré celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$, čiže $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocou tohto parametra j potom majú všetky členy r_k vyjadrenie

$$r_k = j \cdot (n - 1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Ostáva nájsť najmenšie celé $j \geq 1$, pri ktorom sú všetky čísla r_k dané vzťahmi (2) kladné. Keďže tieto čísla zrejme tvoria klesajúcu postupnosť, najmenšie z nich je číslo $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čo je pri $n \geq 3$ číslo kladné už pri $j = 1$ (teda $r_0 = n^n - n + 1$), zatiaľ čo pri $n = 2$ to platí až pri $j = 2$ (vtedy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpoveď. Hľadaný najmenší počet rýb je $r_0 = 7$ pre $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pre každé $n \geq 3$.

Iné riešenie. Postupnosť r_0, r_1, \dots, r_n môžeme počítať aj „odzadu“, t. j. pomocou posledného člena r_n vyjadrovať predošlé členy. S využitím rekurentného vzťahu

$$r_k = qr_{k+1} + 1, \quad \text{pričom} \quad q = \frac{n}{n-1},$$

(kvocient q má teraz prevrátenú hodnotu oproti hodnote v prvom riešení), postupne pre $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ dostávame

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= qr_n + 1, \\ r_{n-2} &= qr_{n-1} + 1 = q^2r_n + q + 1, \\ r_{n-3} &= qr_{n-2} + 1 = q^3r_n + q^2 + q + 1, \\ r_{n-4} &= qr_{n-3} + 1 = q^4r_n + q^3 + q^2 + q + 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podobne ako v prvom riešení (sčítanie členov geometrickej postupnosti a následné dosadenie kvocientu q teraz vynecháme) tak dôjdeme ku vzťahom

$$r_{n-k} = \frac{n^k(r_n + n - 1)}{(n-1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3)$$

Keďže čísla n^k a $(n-1)^k$ sú nesúdeliteľné, hodnoty r_{n-k} sú všetky celočíselné práve vtedy, keď $(n-1)^n \mid r_n + n - 1$, čiže $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čomu zodpovedá (podľa (3) pre $k = n$) počiatočná hodnota $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak sme odvodili rovnaký záver ako pri prvom postupe.

Poznámka. Nájdenie vzťahov pre členy r_k sa pri oboch postupoch veľmi zjednoduší, keď si všimneme, že zmenená postupnosť tvorená číslami $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická. Na túto možnosť riešenia rekurentných rovníc (1) upozorňujeme v úlohe N2.

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nájdite vzorec pre všeobecný člen postupnosti zadanej rekurentne:

- $x_0 = 2, x_{k+1} = 2x_k - 3,$
- $x_0 = \frac{1}{6}, x_{k+1} = 4x_k + 1,$
- $x_0 = 2, x_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot (4 - x_k).$

[Jedná sa o rovnice tvaru $x_{k+1} = qx_k + d$, takže ich môžeme riešiť metódou opísanou v riešení súťažnej úlohy. Výsledky: a) $x_k = 3 - 2^k$, b) $x_k = \frac{1}{2} \cdot 4^k - \frac{1}{3}$, c) $x_k = \left(-\frac{1}{3}\right)^k + 1$.]

N2. Príklady z N1 riešte odlišným postupom: ukážte, že rovnicu $x_{k+1} = qx_k + d$ možno v prípade $q \neq 1$ upraviť na tvar $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ s vhodnou konštantou c . Akonáhle také c nájdete, dostanete geometricкую postupnosť čísel $x_k - c$, pre ktorú okamžite vychádza $x_k - c = q^k(x_0 - c)$, čiže $x_k = c + q^k(x_0 - c)$. [Upravené rovnice sú a) $x_{k+1} - 3 = 2(x_k - 3)$, b) $x_{k+1} + \frac{1}{3} = 4(x_k + \frac{1}{3})$, c) $x_{k+1} - 1 = -\frac{1}{3}(x_k - 1)$.

Všeobecne sú rovnice $x_{k+1} = qx_k + d$ a $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ ekvivalentné práve vtedy, keď platí $d = c - qc$, t. j. vyhovujúce c má tvar $c = d/(1 - q)$.

- D1. Keď k číslu x_0 pripočítame 2 a výsledok vydáme tromi, dostaneme číslo x_1 . Podobne z čísla x_1 dostaneme číslo x_2 , z čísla x_2 číslo x_3 atď. Pre dané n určte všetky tie celé čísla x_0 , pre ktoré sú celé aj všetky čísla x_1, x_2, \dots, x_n . [Podľa rekurentnej rovnice $x_{k+1} = \frac{1}{3}(x_k + 2)$ prepísanej metódou z úlohy N2 na tvar $x_{k+1} - 1 = \frac{1}{3}(x_k - 1)$ majú čísla x_k všeobecné vyjadrenie $x_k = 1 + (x_0 - 1)/3^k$. Všetky čísla x_0, x_1, \dots, x_n (pri danom n) sú teda celé práve vtedy, keď je číslo $x_0 - 1$ celým násobkom každej z mocnín $3^0, 3^1, \dots, 3^n$, t. j. práve vtedy, keď $x_0 = j \cdot 3^n + 1$ pre niektoré celé j .]

6. Pre dané prvočíslo p určte počet (všetkých) usporiadaných trojíc (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, ktoré splňajú vzťah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

pričom $[x, y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x a y . (Tomáš Jurík)

Riešenie. V zadanej rovnici bude výhodné prejsť od najmenších spoločných násobkov k najväčším spoločným deliteľom, a to pomocou známeho vzťahu $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$ (poz. úlohu N3). Označme preto $u = (a, c)$, $v = (b, c)$ a ľavú stranu rovnice prepíšme takto:

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{ac/u + bc/v}{a + b} = \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right) \cdot \frac{c}{a + b}.$$

Zadaná rovnica sa preto (po vynásobení zlomkom $(a + b)/c$) dá zapísať v ekvivalentnom tvare

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b). \quad (1)$$

Porovnajme odhady veľkosti výrazov v (1). Keďže $p^2 > 0$, pre zlomok na pravej strane (1) zrejme platí

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} < 1,$$

takže podľa (1) musí byť

$$\frac{a + b}{2} < \frac{a}{u} + \frac{b}{v} < a + b. \quad (2)$$

Vďaka ľavej nerovnosti nemôžu byť obe prirodzené čísla u, v väčšie ako 1, lebo z nerovností $u \geq 2$ a $v \geq 2$ by sme dostali

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je teda rovné 1. Pravá nerovnosť v (2) však vylučuje prípad $u = v = 1$. Číslu 1 sa preto rovná práve jedno z čísel u, v . Vzhľadom na symetriu rozoberieme iba prípad $u = 1$ a $v \geq 2$.

Keďže číslo v sme zaviedli vzťahom $v = (b, c)$, je zlomok b/v rovný niektorému prirodzenému číslu b_1 . Dosadíme teraz hodnoty $u = 1$ a $b = b_1 v$ do (1) a vzniknutú rovnicu vyriešime vzhľadom na premennú a :

$$\begin{aligned} a + b_1 &= \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b_1 v), \\ (p^2 + 2)(a + b_1) &= (p^2 + 1)(a + b_1 v), \\ a &= b_1((p^2 + 1)v - p^2 - 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Keby platilo $v \geq 3$, dostali by sme z poslednej rovnosti odhad

$$a \geq (p^2 + 1)v - p^2 - 2 \geq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

a to je v spore s nerovnosťou $a \leq 2p^2$ danou oborom, v ktorom podľa zadania úlohy majú hodnoty a, b, c ležať. Platí teda opačná nerovnosť $v < 3$, ktorá spolu s predpokladom $v \geq 2$ vedie k záveru, že nutne $v = 2$. Rovnica (3) tak prechádza na rovnicu

$$a = b_1(2(p^2 + 1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

ktorú na zadanom obore hodnôt a , množine $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, ľahko vyriešime.

Máme $a \leq 2p^2$, odkiaľ $b_1 \leq 2$. Pritom z podmienok $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ vyplýva, že c je párne číslo s číslom a nesúdeliteľné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak vyplýva, že $b_1 = 1$ a p je *nepárne* prvočíslo. Takže $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pre číslo c to znamená nasledujúce spresnenie: c je párne číslo, ktoré nie je násobkom daného prvočísla p .

Ktoré $c \in \{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$ takú podmienku spĺňajú a koľko ich je? Ako už vieme, pre $p = 2$ žiadne také c neexistuje. Pre nepárne p zo všetkých p^2 možných párných čísel $c = 2, 4, 6, \dots, 2p^2$ vylúčime všetky násobky čísla p , teda práve p čísel $2p, 4p, \dots, 2p^2$; vyhovujúcich hodnôt je preto práve $p^2 - p$. Taký je teda počet všetkých hľadaných trojíc $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozoberanom prípade, keď $u = 1$ a $v \geq 2$. V druhom možnom prípade, keď naopak $v = 1$ a $u \geq 2$, existuje vzhľadom na symetriu rovnaký počet $p^2 - p$ vyhovujúcich trojíc, ktoré majú teraz všetky tvar $(2, p^2, c)$. Popis vyhovujúcich trojíc zahrnieme aj do odpovede, aj keď to zadanie úlohy nevyžaduje.

Odpoveď. V prípade $p = 2$ žiadne vyhovujúce trojice neexistujú, v prípade nepárneho prvočísla p ich je práve $2(p^2 - p)$ a všetky majú tvar

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{alebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

pričom $c \in \{1, 2, \dots, 2p^2\}$ je ľubovoľné párne číslo, ktoré nie je násobkom p .

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b, c platí $[a, c] + [b, c] = (a + b)c$. [Sú to práve tie trojice, v ktorých je číslo c nesúdeliteľné ako s číslom a , tak s číslom b . Sčítaním zrejmých nerovností $[a, c] \leq ac$ a $[b, c] \leq bc$ dostaneme $[a, c] + [b, c] \leq (a + b)c$, pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď $[a, c] = ac$ a $[b, c] = bc$.]
- N2. Určte, koľko (usporiadaných) dvojíc prirodzených čísel a, b spĺňa rovnicu
 a) $[a, 70] + [b, 70] = 210$, b) $\frac{1}{[a, 30]} + \frac{1}{[b, 30]} = \frac{1}{30}$.
 [a) 64 dvojíc, b) 16 dvojíc. a): Súčet $[a, 70] + [b, 70]$ dvoch násobkov čísla 70 musí mať tvar $70 + 140$ alebo $140 + 70$. Jedno z čísel $[a, 70], [b, 70]$ je teda 70, druhé je 140. Rovnicu $[x, 70] = 70$ spĺňajú práve tie x , ktoré sú deliteľmi čísla $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ (je ich 8), riešeniami rovnice $[y, 70] = 140$ sú práve čísla $y = 4d$, pričom d je deliteľ čísla $35 = 5 \cdot 7$ (sú teda 4). Preto má pôvodná rovnica $2 \cdot 8 \cdot 4 = 64$ riešení. b): Menovatele oboch zlomkov z ľavej strany rovnice sú násobky 30, žiadny sa však nemôže rovnať číslu 30, ako vyplýva z porovnania s pravou stranou rovnice. Musí teda platiť $[a, 30] \geq 60$ a $[b, 30] \geq 60$, odkiaľ $\frac{1}{[a, 30]} + \frac{1}{[b, 30]} \leq \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $[a, 30] = [b, 30] = 60$, čiže $a = 4m$ a $b = 4n$, pričom m, n sú delitele čísla $15 = 3 \cdot 5$. Tie sú štyri, takže všetkých dvojíc a, b je $4^2 = 16$.]
- N3. Dokážte, že najväčší spoločný deliteľ (x, y) a najmenší spoločný násobok $[x, y]$ ľubovoľných prirodzených čísel x a y spĺňajú rovnosť $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$. [Využite rovnosť $\min\{u, v\} + \max\{u, v\} = u + v$ pre exponenty u, v každého prvočísla v rozkladoch čísel x a y na súčin prvočísel.]

- D1. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí $[a, b] + (a, b) = a + b$. [Vyhovujú práve tie dvojice čísel a, b , pre ktoré platí $a \mid b$ alebo $b \mid a$. Označme $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$, $[a, b] = uvd$ a daný vzťah má tvar $uvd + d = d(u + v)$, čiže $uv + 1 = u + v$, čo možno upraviť na $(u - 1)(v - 1) = 0$. To platí práve vtedy, keď je aspoň jedno z čísel u, v rovné 1, teda práve vtedy, keď $d = a$ alebo $d = b$. Inak povedané, jedno z čísel a, b je deliteľom druhého čísla.]
- D2. Rozhodnite, či súčet niektorých dvoch prirodzených čísel je deliteľom ich najmenšieho spoločného násobku. [Nie. Pripusťme, že pre niektoré prirodzené a, b, k platí $[a, b] = k(a + b)$. Označme $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ a $[a, b] = uvd$, pričom $(u, v) = 1$. Po dosadení do rovnice dostaneme $uvd = k(ud + vd)$, čiže $uv = k(u + v)$. Z rovnosti $ku = v(u - k)$ vyplýva $v \mid ku$, teda $v \mid k$ (lebo $(u, v) = 1$). Podobne sa odvodí vzťah $u \mid k$. Z $v \mid k$ a $u \mid k$ (opäť vzhľadom na $(u, v) = 1$) vyplýva $uv \mid k$, odkiaľ $uv \leq k$, čo protirečí rovnosti $uv = k(u + v)$, podľa ktorej $uv \geq k(1 + 1) = 2k$.]
- D3. V obore prirodzených čísel riešte rovnicu $x^2 + y^2 = 13[x, y]$. [Jedinými dvoma riešeniami sú dvojice $(12, 18)$ a $(18, 12)$. Označme $d = (x, y)$, potom $x = ud$, $y = vd$ a $[x, y] = uvd$, pričom $(u, v) = 1$. Po dosadení do rovnice dostaneme $(u^2 + v^2)d^2 = 13uvd$, čiže $(u^2 + v^2)d = 13uv$. Odtiaľ $u \mid v^2d$ a $v \mid u^2d$, takže vzhľadom na $(u, v) = 1$ máme $u \mid d$ a $v \mid d$, teda aj $uv \mid d$. Preto $d = kuv$ pre vhodné celé k . Dosadením do rovnice $(u^2 + v^2)d = 13uv$ dostaneme $(u^2 + v^2)kuv = 13uv$, čiže $(u^2 + v^2)k = 13$. Jediným deliteľom čísla 13 tvaru $u^2 + v^2$ je samo číslo $13 = 2^2 + 3^2$, takže $\{u, v\} = \{2, 3\}$ a $k = 1$, odkiaľ $d = kuv = 6$ a $\{x, y\} = \{ud, vd\} = \{12, 18\}$.]