2011/2012
61. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 28. novembra 2011.*)

1. Označme n súčet všetkých desaťciferných čísel, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier $0, 1, \ldots, 9$. Zistite zvyšok po delení čísla n sedemdesiatimi siedmimi. (*Pavel Novotný*)

2. Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve dvoch spoločných známych. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že A aj B mali medzi prítomnými rovnaký počet známych. Ukážte tiež, že na stretnutí mohlo byť práve šesť osôb. (*Vojtech Bálint*)

3. Označme S stred kružnice vpísanej, T ťažisko a V priesečník výšok daného rovnoramenného trojuholníka, ktorý nie je rovnostranný.

a) Dokážte, že bod S je vnútorným bodom úsečky TV.

b) Určte pomer dĺžok strán daného trojuholníka, ak je bod S stredom úsečky TV.

(*Jaromír Šimša*)

4. Nech p, q sú dve rôzne prvočísla, m, n prirodzené čísla a súčet

$$\frac{mp-1}{q}+\frac{nq-1}{p}$$

je celé číslo. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{m}{q}+\frac{n}{p}>1.$$

(*Jaromír Šimša*)

5. Dané sú dve zhodné kružnice k_1, k_2 s polomerom rovným vzdialenosti ich stredov. Ich priesečníky označme A a B. Na kružnici k_2 zvoľme bod C tak, že úsečka BC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od B, ktorý označíme L. Priamka AC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od A, ktorý označíme K. Dokážte, že priamka, na ktorej leží ťažnica z vrcholu C trojuholníka KLC, prechádza pevným bodom nezávislým od polohy bodu C. (*Tomáš Jurík*)

6. Nájdite najväčšie reálne číslo k také, že nerovnosť

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{(k+2)(a+b)} \geqq \sqrt{ab}$$

platí pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b. (*Ján Mazák*)