MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6

1 Môj jediný syn sa narodil, keď som mala 37 rokov. To bolo práve 32 rokov po smrti dedka, ktorý zomrel, keď mal 64 rokov. Dedko bol o 12 rokov starší než babka, brali sa v roku 1947, práve keď mala babka 18 rokov. V ktorom roku sa narodil môj syn?

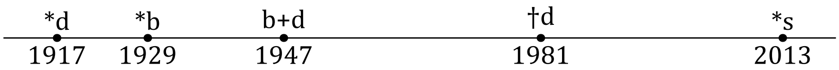
(Miroslava Farkas Smitková)

Riešenie:

Úlohu môžeme riešiť podľa daných informácií odzadu: V roku 1947 mala babka 18 rokov a dedko $18 + 12$ čiže 30. Dedko zomrel vo svojich 64 rokoch, teda 34 rokov po svadbe $(64 - 30 = 34)$, čo bolo v roku $1947 + 34$ čiže 1981. Syn sa narodil 32 rokov po smrti dedka, t. j. v roku $1981 + 32$ čiže 2013.

Poznámka:

Odvodené súvislosti je možné znázorniť na časovej osi:



Poznámka:

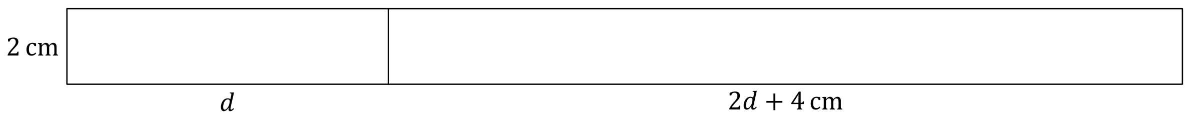
Uvedomme si, že zadanie predpokladá, že všetky zmienené udalosti sa stali v ten istý deň roka (napríklad 1. januára). V opačnom prípade je riešenie úlohy nejednoznačné: Ak by sa napr. dedko narodil 31. 12. 1916 a babka 1. 1. 1929, boli by od seba 12 rokov (a jeden deň), pritom prvý letopočet by sa líšil od vyššie uvedeného.

2 Peter mal obdĺžnik šírky 2 cm a neznámej dĺžky. Radka mala obdĺžnik šírky 2 cm, ktorého dĺžka bola rovná obvodu Petrovho obdĺžnika. Keď k sebe obdĺžniky priložili ich šírkami, získali nový obdĺžnik s obvodom 63 cm. Určte obsah Petrovho obdĺžnika.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Označme neznámu dĺžku Petrovho obdĺžnika d. Petrov obdĺžnik mal obvod $2d + 4$ cm, čo bola dĺžka Radkinho obdĺžnika.



Zložený obdĺžnik mal potom obvod $6d + 12$ cm, takže $6d + 12\text{ cm} = 63\text{ cm}$. Odtiaľ dostávame $6d = 63\text{ cm} - 12\text{ cm} = 51\text{ cm}$, a teda $d = 51\text{ cm} : 6 = 8{,}5\text{ cm}$. Petrov obdĺžnik mal teda obsah $2\text{ cm} \cdot 8{,}5\text{ cm}$ čiže 17 cm^2.

Dosadením vypočítaných hodnôt do zadania ľahko zistíme, že táto situácia naozaj existuje.

3 Miška skúma čísla, ktoré sa dajú vyjadriť ako súčet aspoň dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel. Obzvlášť ju zaujímajú čísla, ktoré sa takto dajú vyjadriť viacerými spôsobmi (napr. $18 = 5 + 6 + 7 = 3 + 4 + 5 + 6$). Čísla, ktoré možno takto vyjadriť aspoň tromi spôsobmi, nazvala *veľkolepé*. Nájdite aspoň tri Miškine veľkolepé čísla.

(Veronika Hucíková)

Riešenie:

Dve po sebe idúce čísla dávajú súčty $0 + 1$ čiže 1, $1 + 2$ čiže 3, $2 + 3$ čiže 5, $3 + 4$ čiže 7 a tak ďalej. Sčítance postupne zväčšujeme o 1, teda súčty sa postupne zväčšujú o 2.

Tri po sebe idúce čísla dávajú súčty $0 + 1 + 2$ čiže 3, $1 + 2 + 3$ čiže 6, $2 + 3 + 4$ čiže 9, $3 + 4 + 5$ čiže 12 a tak ďalej. Sčítance postupne zväčšujeme o 1, teda súčty sa postupne zväčšujú o 3.

Analogicky zistíme, že najmenší súčet štyroch po sebe idúcich čísel je $0 + 1 + 2 + 3$ čiže 10 a nasledujúce možné súčty sú 10, 14, 18, 22 a tak ďalej.

Obdobnými úvahami dostávame nasledujúci prehľad súčtov niekoľkých po sebe idúcich čísel:

- súčty dvoch: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, …
- súčty troch: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, …
- súčty štyroch: 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, …

- súčty piatich: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, …
- súčty šiestich: 15, 21, 27, 33, 39, 45, …

Veľkolepé čísla sú také čísla, ktoré patria aspoň do troch rôznych vyššie uvedených skupín. Tri najmenšie sú:

- 15 s rozkladmi $7 + 8$, $4 + 5 + 6$ a $1 + 2 + 3 + 4 + 5$,
- 21 s rozkladmi $10 + 11$, $6 + 7 + 8$ a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$,
- 27 s rozkladmi $13 + 14$, $8 + 9 + 10$ a $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$.

Poznámka:

Spôsobov, ako veľkolepé čísla hľadať, je viac. Napr. pre každých šesť po sebe idúcich čísel platí, že súčet prvého a šiesteho čísla je rovnaký ako súčet druhého a piateho a ten je rovnaký ako súčet tretieho a štvrtého; tento súčet je nepárny a označíme ho a. Súčet všetkých šiestich čísel je potom rovný $3a$, čo je číslo, ktoré je možné vyjadriť ako súčet troch po sebe idúcich čísel $a - 1$, a, $a + 1$. Pretože a je nepárne číslo, je aj $3a$ nepárne a každé také číslo je súčtom dvoch po sebe idúcich čísel; pri našom značení $(3a + 1)/2$ a $(3a - 1)/2$.

Platí tiež, že súčet nepárneho počtu po sebe idúcich čísel je vždy násobkom tohto počtu. Všetky tieto (a ďalšie zaujímavé) poznatky je možné s úspechom kombinovať, a nájsť tak ďalšie veľkolepé čísla. Z uvedeného plynie, že veľkolepých čísel je neobmedzené množstvo.

---

4 Kubo si napísal štvormiestne číslo, ktorého dve číslice boli párne a dve nepárne. Ak by v tomto čísle vyškrtol obe párne číslice, dostal by číslo štyrikrát menšie, než keby v ňom vyškrtol obe nepárne číslice. Aké najväčšie číslo s týmito vlastnosťami si mohol Kubo napísať?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Po vyškrtnutí párnych číslic má ostať číslo, ktoré je štyrikrát menšie než iné dvojmiestne číslo. Toto číslo teda musí byť menší než 25, lebo $4 \cdot 25$ čiže 100 je už trojmiestne). Po vyškrtnutí párnych číslic má ostať číslo zapísané nepárnymi číslicami. Najväčšie také číslo, ktoré je zároveň menšie než 25, je číslo 19. Avšak $4 \cdot 19$ čiže 76 nie je číslo tvorené párnymi číslicami. Ďalším kandidátom je číslo 17. Číslo $4 \cdot 17$ čiže 68 je tvorené párnymi číslicami, takže vyhovuje, máme teda číslice 1, 7, 6 a 8.

Najväčšie nimi tvorené číslo, avšak so zachovaným poradím ako dvojice nepárnych, tak dvojice párnych číslic, je 6817. A to je najväčšie číslo, ktoré mohol Kubo zapísať. Ďalšie možnosti nie je nutné preverovať: štvornásobok čísla menšieho než 17 je menší než 68, teda pri splnení ostatných podmienok väčšie číslo než 6817 nie je možné dostať.

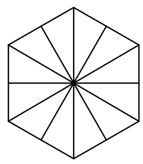
---

5 Mojmír rozstrihal pravidelný šesťuholník na 12 zhodných dielov. Z týchto dielov (nie nutne zo všetkých) skladal rozličné pravouhlé trojuholníky. Ako mohli Mojmírove zložené trojuholníky vyzerať? Nájdite aspoň štyri možnosti.

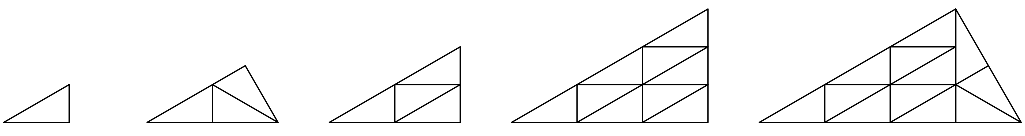
(Libuše Hozová)

Riešenie:

Pravidelný šesťuholník je možné rozdeliť na 12 zhodných trojuholníkov polením šiestich zhodných rovnostranných trojuholníkov, z ktorých je pravidelný šesťuholník utvorený:



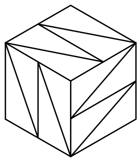
Z týchto trojuholníkov je možné zložiť pravouhlé trojuholníky pomocou 1, 3, 4, 9, resp. všetkých 12 dielov napr. takto:



Na zdôvodnenie, že naznačené skladanie je v poriadku, si treba uvedomiť, že použité diely sú trojuholníky s vnútornými uhlami 30°, 60° a 90°, ktorých najdlhšia strana je zhodná so stranou pôvodného šesťuholníka a najkratšia strana je polovičná.

Poznámka:

Pravidelný šesťuholník je možné rozdeliť na 12 zhodných trojuholníkov aj nasledujúcim spôsobom:



Najväčší vnútorný uhol v každom z týchto trojuholníkov je 120°, zvyšné dva sú približne 40,9° a 19,1°. Pomocou týchto trojuholníkov však nie je možné zložiť pravý uhol.

---

6 Pätica kamarátov porovnávala, koľko starého železa priviezli do zberu. Priemerne to bolo 55 kg, avšak Ivan priviezol len 43 kg. Koľko kilogramov v priemere priviezli bez Ivana?

(Libuše Hozová)

Riešenie 1:

Ivan priviezol 43 kg, t. j. o 12 kg menej, než bol (aritmetický) priemer všetkých kamarátov. Týchto 12 kg zodpovedá priemerne 3 kg na každého zo štyroch zvyšných kamarátov. Bez Ivana kamaráti priviezli priemerne 55 kg + 3 kg čiže 58 kg železa.

Riešenie 2:

Všetci piati dohromady priviezli 5 · 55 kg čiže 275 kg železa. Bez Ivana na ostatných pripadlo 275 kg − 43 kg čiže 232 kg, teda priemerne na jedného 232 kg : 4 čiže 58 kg.