MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8

1 Vierka z troch daných číslic zostavovala navzájom rôzne trojmiestne čísla. Keď všetky tieto čísla sčítala, vyšlo jej 1221. Aké číslice Vierka použila? Určte päť možností.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Aby Vierka mohla z daných číslic zostaviť trojmiestne číslo, musela byť aspoň jedna číslica nenulová. Aby bol súčet všetkých zostavených čísel štvormiestny, musela zostaviť aspoň dve trojmiestne čísla. Odtiaľ vyplýva, že dané číslice nemohli byť všetky rovnaké a nanajvýš jedna z nich bola nulová.

Rozlíšme možnosti:

- Jedna číslica je 0 a ostatné dve sú nenulové a rôzne.

  Označme ich a a b. Vytvorené čísla sú potom $\overline{ab0}$, $\overline{ba0}$, $\overline{a0b}$, $\overline{b0a}$. Podľa zadania teda platí

  $$1221 = \overline{ab0} + \overline{ba0} + \overline{a0b} + \overline{b0a} =$$
  $$= (100a + 10b + 0) + (100b + 10a + 0) + (100a + 10 \cdot 0 + b) + (100b + 10 \cdot 0 + a) = 211(a + b).$$

  Číslo 1221 však nie je deliteľné 211, týmto spôsobom teda požadovaný súčet dostať nemožno.

- Jedna číslica je 0 a ostatné dve sú rovnaké.

  Označme ich a. Vytvorené čísla sú potom $\overline{aa0}$, $\overline{a0a}$. Podľa zadania teda platí

  $$1221 = \overline{aa0} + \overline{a0a} = (100a + 10a + 0) + (100a + 10 \cdot 0 + b) = 211a.$$

  Číslo 1221 však nie je deliteľné 211, týmto spôsobom teda požadovaný súčet dostať nemožno.

- Dve číslice sú nenulové a rovnaké a tretia iná nenulová.

  Nech rovnaké sú a a zvyšná b. Vytvorené čísla sú potom $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$. Podľa zadania teda platí

  $$1221 = \overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = (100a + 10a + b) + (100a + 10b + a) + (100b + 10a + a) = 111(2a + b),$$

  z čoho $11 = 2a + b$, a teda $b = 11 - 2a$. Z toho $1 \leq 11 - 2a \leq 9$, a teda $1 \leq a \leq 5$. Rozoberme všetky možnosti:

  - Nech $a = 1$.

    Potom $b = 11 - 2 \cdot 1 = 9$. A naozaj, $119 + 191 + 911 = 1221$.
  - Nech $a = 2$.

    Potom $b = 11 - 2 \cdot 2 = 7$. A naozaj, $227 + 272 + 722 = 1221$.
  - Nech $a = 3$.

    Potom $b = 11 - 2 \cdot 3 = 5$. A naozaj, $335 + 353 + 533 = 1221$.
  - Nech $a = 4$.

    Potom $b = 11 - 2 \cdot 4 = 3$. A naozaj, $443 + 434 + 344 = 1221$.
  - Nech $a = 5$.

    Potom $b = 11 - 2 \cdot 5 = 1$. A naozaj, $551 + 515 + 155 = 1221$.

- Všetky tri číslice sú rôzne a nenulové.

  Označme ich a, b, c. Vytvorené čísla sú potom $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Podľa zadania teda platí

  $$1221 = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} =$$
  $$= (100a+10b+c)+(100a+10c+b)+(100b+10a+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b)+(100c+10b+a) =$$
  $$= 222(a + b + c),$$

  čo je však spor, lebo ľavá strana je nepárna a pravá párna. Tento prípad teda nevyhovuje.

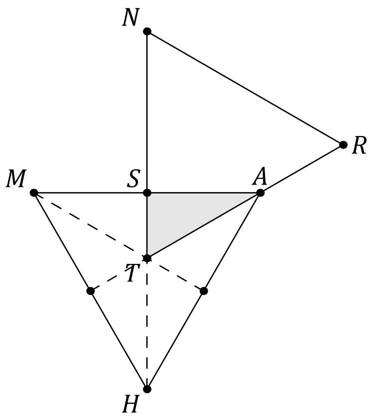
Zhrnutím dostávame, že vyhovuje práve týchto päť možností: $(1, 1, 9)$, $(2, 2, 7)$, $(3, 3, 5)$, $(4, 4, 3)$, $(5, 5, 1)$.

2 TRN a HAM sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Pritom bod T je ťažiskom trojuholníka HAM a bod R leží na polpriamke TA. Aký je pomer obsahov časti trojuholníka TRN, ktorá je vnútri trojuholníka HAM, a tej, ktorá je mimo neho?

(Eva Semerádová)

Riešenie 1:

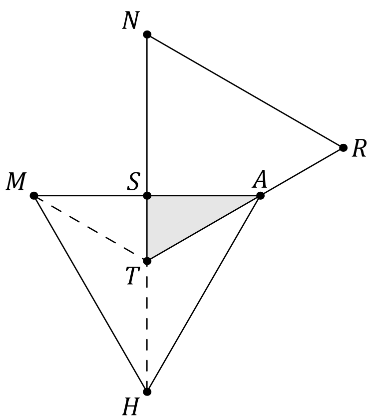
Ťažisko je priesečníkom ťažníc a tie sú v rovnostrannom trojuholníku súčasne výškami aj osami vnútorných uhlov. Týmito priamkami je trojuholník HAM rozdelený na šesť navzájom zhodných trojuholníkov. Veľkosti vnútorných uhlov každého z týchto trojuholníkov sú 90° pri vrcholoch na stranách HAM (päty výšok), 30° pri vrcholoch HAM (polovica vnútorného uhla rovnostranného trojuholníka) a 60° pri vrchole T (aby súčet všetkých bol 180°). Označme S priesečník strán trojuholníkov HAM a TRN. Trojuholník ATS je spoločnou časťou trojuholníkov HAM a TRN. Porovnaním vnútorných uhlov pri vrchole T zisťujeme, že trojuholník ATS je jedným zo šiestich vyššie zmieňovaných zhodných trojuholníkov.



Trojuholníky HAM a TRN sú zhodné a ich spoločná časť predstavuje šestinu obsahu každého. Preto časť trojuholníka TRN, ktorá leží mimo trojuholníka HAM, predstavuje päť šestín jeho obsahu. Pomer obsahov týchto častí je teda $1 : 5$.

Riešenie 2:

Označme S stred úsečky AM.



Keďže HAM je rovnostranný trojuholník, AT je osou jeho uhla HAM a HS je jeho výškou. Platí teda

$$|\sphericalangle SAT| = |\sphericalangle MAT| = \frac{1}{2}|\sphericalangle MAH| = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$$

a

$$|\sphericalangle STA| = 90° - |\sphericalangle SAT| = 90° - 30° = 60°.$$

To teda znamená, že priamky HS a TN splývajú.

Všetky tri trojuholníky HTA, ATM a MTH sú rovnoramenné a zhodné, takže $\mathrm{S}(MAT) = \frac{1}{3}\mathrm{S}(HAM)$. Keďže S je ťažnica TAM, platí

$$\mathrm{S}(SAT) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{S}(MAT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathrm{S}(HAM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathrm{S}(TRN) = \frac{1}{6} \cdot \mathrm{S}(TRN).$$

Potom

$$\mathrm{S}(ARNS) = \mathrm{S}(TRN) - \mathrm{S}(SAT) = \mathrm{S}(TRN) - \frac{1}{6} \cdot \mathrm{S}(TRN) = \frac{5}{6} \cdot \mathrm{S}(TRN),$$

a teda hľadaný pomer $S(SAT) : S(ARNS)$ je $1 : 5$.

Poznámka:

Zo zadania nevieme, či bod S leží na strane AM, alebo na strane AH. Voľba na obrázku nie je podstatná, v oboch prípadoch sú závery aj ich zdôvodnenie rovnaké.

---

3 Na novoobjavenej planéte žijú zvieratá, ktoré astronauti pomenovali podľa počtu nôh jednonožky, dvojnožky, trojnožky a tak ďalej (zvieratá bez nôh tam neboli). Zvieratá s nepárnym počtom nôh majú dve hlavy, zvieratá s párnym počtom nôh majú jednu hlavu. V istej priehlbine stretli skupinu takých zvierat a napočítali na nich 18 hláv a 24 nôh. Koľko zvierat mohlo byť v priehlbine? Určte všetky možnosti.

(Tomáš Bárta)

Riešenie 1:

Pretože celkový počet hlav zvierat v priehlbine bol párny, musel byť počet jednohlavých zvierat párny. Pretože jednohlavé zvieratá majú párne počty nôh, dvojhlavé zvieratá majú nepárne počty nôh a celkový počet nôh bol párny, musel byť počet dvojhlavých zvierat tiež párny. Pretože nôh bolo celkovo 24, nemohlo byť jednohlavých zvierat viac než 12.

Označme počet jednohlavých, resp. dvojhlavých zvierat v priehlbine j, resp. d. Predchádzajúce závery zodpovedajú požiadavkám, aby j a d boli nezáporné párne čísla a $j \leq 12$. Informácia o počte hláv navyše znamená $j + 2d = 18$. Všetkým týmto požiadavkám vyhovujú práve nasledujúci dvojice čísel (j, d): $(2, 8)$, $(6, 6)$ a $(10, 4)$.

Pre každú z uvedených možností treba overiť, či mohla skutočne nastať, t. j. či existuje príklad počtov jednotlivých druhov zvierat so správnym celkovým počtom nôh:

- Ak $j = 2$ a $d = 8$, mohlo ísť napr. o 2 štvornožky, 4 jednonožky a 4 trojnožky (lebo $2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 24$).
- Ak $j = 6$ a $d = 6$, mohlo ísť napr. o 6 dvojnožiek, 3 jednonožky a 3 trojnožky (lebo $6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$).
- Ak $j = 6$ a $d = 6$, mohlo ísť napr. o 10 dvojnožiek a 4 jednonožky (lebo $10 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 24$).

V priehlbine teda mohlo byť 10, 12 alebo 14 zvierat.

Riešenie 2:

Označme x počet nepárnonožiek a y počet párnonožiek. Celkový počet zvierat je potom $x + y$.

Keďže nepárnonožky prispievajú do celkového párneho počtu hláv (18) párnym počtom, aj párnonožky doň musia prispievať párnym počtom, a keďže každá z nich má práve jednu hlavu, musí ich byť párny počet.

Keďže párnonožky prispievajú do celkového párneho počtu nôh (24) párnym počtom, aj nepárnonožky doň musia prispievať párnym počtom, a keďže každá z nich má nepárny počet nôh, musí ich byť párny počet.

Oba počty x a y sú teda párne, čo znamená, že existujú párne počty a a b také, že $x = 2a$ a $y = 2b$.

Keďže celkový počet hláv je $2x + y$, platí $2x + y = 18$, a teda $2 \cdot 2a + 2b = 18$, z čoho $2a + b = 9$. Z toho vyplýva, že $b = 9 - 2a$ a tiež $2a \leq 9$, čiže $a \leq 4$.

Celkový počet nôh je aspoň $1 \cdot x + 2 \cdot y$ čiže $2a + 4b$, takže $2a + 4b \leq 24$, z čoho $4b \leq 24$, a teda $b \leq 6$. Potom $9 = 2a + b \leq 2a + 6$, z čoho $3 \leq 2a$, a teda $a \geq 2$.

Máme teda nasledujúce možnosti:

a	b	x	y	$x + y$
2	5	4	10	14
3	3	6	6	12
4	1	8	2	10

Do úvahy tak pripadajú počty zvierat 14, 12, 10. Ukážeme, že každý z nich sa naozaj môže nadobudnúť, a to dokonca s dodatočným predpokladom, že medzi zvieratami nie sú iné než jednonožky, dvojnožky, trojnožky a štvornožky:

Označme počet jednonožiek m a počet dvojnožiek n, pričom $m \leq x = 2a$ a $n \leq y = b$ (vo všetkých piatich prípadoch už hodnoty x a y poznáme). Potom trojnožiek je potom $x - m$ čiže $2a - m$ a počet štvornožiek $y - n$ čiže $2b - n$. Hľadáme teda počty m a n také, že

$$24 = 1m + 2n + 3(2a - m) + 4(2b - n) = 6a + 8b - 2m - 2n,$$

t. j. $2m + 2n = 6a + 8b - 24$ čiže $m + n = 3a + 4b - 12$.

Rozoberme teraz jednotlivé možnosti, prislúchajúce postupne riadkom tabuľky:

- Nech $a = 2$ a $b = 5$.

  Potom $m + n = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 12 = 6 + 20 - 12 = 14$. Stačí teda za m zvoliť 4, potom $n = 10$. Máme teda 4 jednonožky, 10 dvojnožiek, $2 \cdot 2 - 4$ čiže 0 trojnožiek a $2 \cdot 5 - 10$ čiže 0 štvornožiek. Počet hláv je potom naozaj $2 \cdot 4 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0$ čiže 18 a počet nôh $1 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0$ čiže 24.

- Nech $a = 3$ a $b = 3$.

  Potom $m + n = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 12 = 9 + 12 - 12 = 9$. Stačí teda za m zvoliť 4, potom $n = 5$. Máme teda 4 jednonožky, 5 dvojnožiek, $2 \cdot 3 - 4$ čiže 2 trojnožky a $2 \cdot 3 - 5$ čiže 1 štvornožku. Počet hláv je potom naozaj $2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ čiže 18 a počet nôh $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1$ čiže 24.

- Nech $a = 4$ a $b = 1$.

  Potom $m + n = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 12 = 12 + 4 - 12 = 4$. Stačí teda za m zvoliť 4, potom $n = 10$. Máme teda 4 jednonožky, 0 dvojnožiek, $2 \cdot 4 - 4$ čiže 4 trojnožky a $2 \cdot 1 - 0$ čiže 2 štvornožky. Počet hláv je potom naozaj $2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2$ čiže 18 a počet nôh $1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2$ čiže 24.

Zhrnutím dostávame, že možné počty zvierat v priehlbine sú práve 14, 12, 10.

---

4 V danej skupine čísel je jedno číslo rovné priemeru všetkých, najväčšie číslo je o 7 väčšie než priemer, najmenšie je o 7 menšie než priemer a väčšina čísel zo skupiny má podpriemernú hodnotu. Aký najmenší počet čísel môže byť v skupine?

(Karel Pazourek)

Riešenie 1:

Označme priemer čísel v skupine p. Najmenšie číslo zo skupiny je $p-7$, najväčšie $p+7$. Priemer týchto troch čísel je p, priemer zvyšných čísel zo skupiny preto musí byť tiež p. Teda niektoré zo zvyšných čísel musí byť menšie a niektoré väčšie než p. Aby navyše väčšina čísel bola podpriemerných, musí byť tých, ktoré sú menšie než p, aspoň o dve viac než tých, ktoré sú väčšie než p. V skupine je aspoň sedem čísel.

Ukážeme, že tento počet možno dosiahnuť: Stačí vziať čísla $-7, -3, -2, -1, 0, 6, 7$. Ich priemer je 0, takže naozaj minimum je o 7 menšie než priemer, maximum je o 7 väčšie než priemer a podpriemernú hodnotu majú 4 zo 7 čísel, čo je väčšina.

Najmenší vyhovujúci počet je teda 7.

Riešenie 2:

Hľadané čísla označme $x_1, \dots, x_n$ tak, aby platilo $x_1 < \dots < x_n$. Priemer týchto čísel $\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ označme p. Podľa znenia $x_1 + 7 = p = x_n - 7$ a $x_k = p$ pre nejaké k spomedzi $2, \dots, n-1$, pričom, aby väčšina bola menšia než p, v prípade nepárneho n platí $k \geq \frac{1}{2}(1+n) + 1$ a v prípade párneho n platí $k \geq \frac{1}{2}n + 2$, Z toho $n \geq 3$.

Z dvojrovnosti $x_1 + 7 = p = x_n - 7$ máme $2p = (x_1 + 7) + (x_n - 7) = x_1 + x_n$. Zo vzťahu $p = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ dostávame $np = x_1 + \dots + x_n$. Odčítaním týchto vzťahov dostávame $(n-2)p = x_2 + \dots + x_{n-1}$.

Zhrnutím všetkých vzťahov dostávame

$$p = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{x_2 + \dots + x_{n-2}}{n-2},$$

takže aj priemer všetkých ostatných čísel okrem najmenšieho a najväčšieho je p.

Ak by platilo $n = 3$, z poslednej rovnosti by sme mali $p = \frac{x_2}{1} = x_2$. Podpriemernú hodnotu má teda len x_1, teda jedno číslo, čo však nie je väčšina.

Ak by platilo $n = 4$, z poslednej rovnosti by sme mali $p = \frac{x_2+x_3}{2}$, takže $x_2 < p < x_3$. Podpriemernú hodnotu majú teda len x_1 a x_2, teda dve čísla, čo však nie je väčšina.

Ak by platilo $n = 5$, mali by sme $4 \geq k \geq \frac{1}{2}(1+5)+1 = 4$, takže $k = 4$, ale tiež $p = \frac{x_2+x_3+x_4}{3}$, t. j. $p = \frac{x_2+x_3+x_4}{3} < \frac{p+p+p}{3} = p$, čo by bol spor.

Ak by platilo $n = 6$, mali by sme $5 \geq k \geq \frac{1}{2}6+2 = 5$, takže $k = 5$, ale tiež $p = \frac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}$, t. j. $p = \frac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4} < \frac{p+p+p+p}{4} = p$, čo by bol spor.

Ukážeme, že prípad $n = 7$ vyhovuje: Stačí vziať čísla $-7, -3, -2, -1, 0, 6, 7$. Ich priemer je 0, takže naozaj minimum je o 7 menšie než priemer, maximum je o 7 väčšie než priemer a podpriemernú hodnotu majú 4 zo 7 čísel, čo je väčšina.

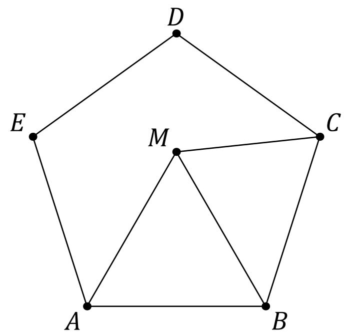
Najmenší vyhovujúci počet je teda 7.

---

5 V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ je obsiahnutý rovnostranný trojuholník ABM. Určte veľkosť uhla BCM.

(Libuše Hozová)

Riešenie:



V päťuholníku je súčet veľkostí vnútorných uhlov $(5-2)\cdot 180°$ čiže $540°$, v pravidelnom je teda každý z nich $540°/5$ čiže $108°$.

Podobne môžeme ukázať, že v rovnostrannom trojuholníku ABM má každý uhol veľkosť $60°$.

Platí teda $|\sphericalangle CBM| = |\sphericalangle CBA| - |\sphericalangle MBA| = 108° - 60° = 48°$.

Z pravidelnosti päťuholníka $ABCDE$ a rovnostrannosti trojuholníka ABM dostávame $|BM| = |BA| = |BC|$, takže trojuholník BMC je rovnoramenný so základňou MC.

Vnútorné uhly pri tejto strane sú teda zhodné takže $|\sphericalangle BCM| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle CBM|) = \frac{1}{2}(180° - 48°) = 66°$.

---

6 Alenka dostala list papiera s nasledujúcimi tvrdeniami:

A: Najviac jedno z tvrdení A, B, C, D, E je pravdivé.

B:

C: Všetky tvrdenia A, B, C, D, E sú pravdivé.

D:

E: Tvrdenie A je pravdivé.

Tvrdenia B a D boli napísané neviditeľným atramentom, ktorý sa dá prečítať len pod špeciálnou lampou. Aj bez takejto lampy však Alenka dokázala rozhodnúť, či môže týmto tvrdeniam dôverovať. Určte i vy, ktoré z tvrdení A, B, C, D, E sú pravdivé a ktoré nepravdivé.

(Iveta Jančigová)

Riešenie:

Predpokladajme, že každé z tvrdení A, B, C, D, E môže byť len buď pravdivé, alebo nepravdivé.

Ak by E bolo pravdivé, podľa neho by bolo pravdivé aj A. Z jeho tvrdenia však vyplýva, že A a E naraz nemôžu byť naraz pravdivé, čo je však spor.

To teda znamená, že E je nepravdivé, čo znamená, že aj A je nepravdivé. Podľa toho sú pravdivé aspoň dve tvrdenia. Nie sú to však, ako už vieme, ani A ani E a nie je to ani C. Pravdivé sú teda práve neviditeľné tvrdenia B a D.

Poznámka:

Náš predpoklad na začiatku riešenia nie je samozrejmosť, existujú totiž „tvrdenia", ktoré nemôžu byť ani pravdivé ani nepravdivé, najjednoduchším príkladom je zrejme „Ja som nepravdivé tvrdenie.".

Alenka nemôže tušiť, čo v skutočnosti tvrdí B. Čo ak je tam napísané napríklad „2+2=5."?

Bez nášho úvodného predpokladu teda Alenka nemôže týmto tvrdeniam dôverovať a ani rozhodnúť o ich pravdivosti či nepravdivosti.
