
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Zadania úloh 1. časti celoštátneho kola kategórie A

- 1** Na papieri je v rade vedľa seba napísaných 71 nenulových reálnych čísel. Platí, že každé číslo okrem prvého a posledného je o 1 menšie ako súčin jeho dvoch susedov. Dokážte, že prvé a posledné číslo sa rovnajú.
- 2** Hovoríme, že kladné celé číslo d je *spravodlivé*, ak počet 2021-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d , je rovnaký ako počet 2022-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d . Obsahuje množina $\{1, 2, \dots, 35\}$ viac tých čísel, ktoré sú spravodlivé, alebo tých, ktoré spravodlivé nie sú?
(Palindrómom nazývame prirodzené číslo, ktorého dekadický zápis sa číta zľava doprava rovnako ako sprava doľava.)
- 3** V ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme M stred strany BC a N stred oblúka BAC kružnice jemu opísanej. Ďalej označme l kružnicu s priemerom BC a D, E priesečníky l s osou uhla BAC . Body F, G ležia na kružnici l tak, že štvoruholník $DEFG$ je pravouholník. Dokážte, že body F, G, M, N ležia na jednej kružnici.

1. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **pondelok 21. marca 2022** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

4 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P priesečník jeho uhlopriečok a O, Q stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom APB a DPC . Dokážte, že štvoruholník $OBCQ$ je rovnobežník.

5 Nájdite všetky celé čísla n , pre ktoré je číslo

$$2^n + n^2$$

druhou mocninou nejakého celého čísla.

6 Pri pokuse o kolonizáciu Marsu zaplavilo ľudstvo slnečnú sústavu 50 satelitmi, ktoré medzi sebou vytvorili 225 komunikačných línií (každá línia existuje medzi jednou dvojicou satelitov a žiadne dva satelity medzi sebou nemajú viac ako jednu líniu). Hovoríme, že trojica satelitov je *prepojená*, ak aspoň jeden z nich má vytvorené komunikačné línie s oboma ostatnými satelitmi. Určte najmenší a najväčší možný počet prepojených trojíc satelitov.

2. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **utorok 22. marca 2022** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže
