

2011/2012
61. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: v pondelok 16. januára 2012.)

1. Medzi všetkými desaťcifernými číslami deliteľnými jedenástimi, v ktorých sa žiadna cifra neopakuje, nájdite najmenšie a najväčšie. (Jaroslav Zhouf)

2. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C , ktorého obsah označme P . Nech F je päta výšky z vrcholu C na preponu AB . Na kolmiciach na priamku AB , ktoré prechádzajú vrcholmi A a B , v polrovine opačnej k polrovine ABC uvažujme postupne body D a E , pre ktoré platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojuholníka DEF označme Q . Dokážte, že platí $P \geq Q$, a zistite, kedy nastáva rovnosť. (Jaroslav Švrček)

3. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y , ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}x \cdot \lfloor y \rfloor &= 7, \\ y \cdot \lfloor x \rfloor &= 8.\end{aligned}$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje *dolnú celú časť* čísla a , t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a .) (Pavel Novotný)

4. Dané sú dve rôznobežky a, c prechádzajúce bodom P a bod B , ktorý na nich neleží. Zostrojte pravouholník $ABCD$ s vrcholmi A, C a D postupne na priamkach a, c a PB . (Jaromír Šimša)

5. V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.

b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

(Ján Mazák)

6. Anna a Boris hrajú kartovú hru. Každý z nich má päť kariet s hodnotami 1 až 5 (z každej jednu). V každom z piatich kôl obaja vyložia jednu kartu a kto má vyššie číslo, získa bod. V prípade kariet s rovnakými číslami nezíska bod nikto. Použité karty sa do hry nevracajú. Ten, kto získa na konci viac bodov, vyhral. Koľko percent zo všetkých možných priebehov takej hry skončí výhrou Anny? (Tomáš Jurík)