MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh 1. dňa celoštátneho kola kategórie A

1 Na papieri je v rade vedľa seba napísaných 71 nenulových reálnych čísel. Platí, že každé číslo okrem prvého a posledného je o 1 menšie ako súčin jeho dvoch susedov. Dokážte, že prvé a posledné číslo sa rovnajú.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Dokážeme, že postupnosť 71 čísel na tabuli je periodická s periódou 5. Keďže $71 - 1$ čiže 70 je násobok 5, bude tým úloha vyriešená.

Označme ľubovoľných šesť po sebe napísaných čísel postupne a, b, c, d, e, f. Chceme teda dokázať, že $f = a$.

Zo zadania máme $b = ac - 1$, čo možno vďaka podmienke $a \neq 0$ prepísať na

$$c = \frac{b+1}{a}.$$

Podobne ďalej dostaneme

$$d = \frac{c+1}{b} = \frac{\frac{b+1}{a} + 1}{b} = \frac{a+b+1}{ab},$$

$$e = \frac{d+1}{c} = \frac{\frac{a+b+1}{ab} + 1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{ab+a+b+1}{ab} \cdot \frac{a}{b+1} = \frac{(a+1)(b+1)a}{ab(b+1)} = \frac{a+1}{b},$$

$$f = \frac{e+1}{d} = \frac{\frac{a+1}{b} + 1}{\frac{a+b+1}{ab}} = \frac{a+b+1}{b} \cdot \frac{ab}{a+b+1} = a,$$

pričom krátenie číslami $b + 1$ a $a + b + 1$ bolo korektné, pretože ide o čitatele zlomkov, ktorými sme predtým vyjadrili nenulové čísla c a d.

Riešenie 2:

Iným spôsobom dokážeme, že pre každých šesť po sebe napísaných čísel a, b, c, d, e, f platí $a = f$. Odvodíme totiž rovnosť $abcde = bcdef$, z ktorej požadovaný záver vyplynie po vydelení oboch strán nenulovým súčinom $bcde$.

Vďaka zadanej podmienke (aplikovanej nižšie na podčiarknuté súčiny) môžeme písať

$$abcde = (\underline{ac})(\underline{bd})e = (b+1)(c+1)e = (b+1)(\underline{ce} + e) = (b+1)(d+e+1) =$$

$$= \underline{bd} + be + b + d + e + 1 = be + b + c + d + e + 2.$$

Analogicky

$$bcdef = fedcb = (\underline{fd})(\underline{ec})b = (e+1)(d+1)b = (e+1)(\underline{bd} + b) = (e+1)(c+b+1) =$$

$$= \underline{ec} + eb + e + c + b + 1 = be + b + c + d + e + 2.$$

Vidíme, že rovnosť $abcde = bcdef$ naozaj platí.

Poznámka:

Výpočet druhého súčinu $fedcb$ nebol nevyhnutný. Stačilo konštatovať, že podmienka zo zadania úlohy nezávisí od toho, v akom z oboch možných smerov napísaný rad čísel prečítame, a že výsledok pre prvý súčin $abcde$ závisí iba od štvorice (b, c, d, e) a je rovnaký ako pre štvoricu (e, d, c, b).

Poznámka:

Tvrdenie úlohy neplatí, ak pripustíme, že niektoré z napísaných čísel sa môžu rovnať nule. Príkladom je trebárs

$$(1, \underbrace{\underline{0, -1}, \underline{0, -1}, \dots, \underline{0, -1}}_{35\times}).$$

2 Hovoríme, že kladné celé číslo d je *spravodlivé*, ak počet 2021-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d, je rovnaký ako počet 2022-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d. Obsahuje množina $\{1, 2, \dots, 35\}$ viac tých čísel, ktoré sú spravodlivé, alebo tých, ktoré spravodlivé nie sú?

(Palindrómom nazývame prirodzené číslo, ktorého dekadický zápis sa číta zľava doprava rovnako ako sprava doľava.)

(David Hruška, Josef Tkadlec)

Riešenie:

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n označme $\overleftarrow{n}$ jeho zápis v opačnom poradí. Ten má zrejme rovnaký počet cifier ako n.

Každý 2021-ciferný palindróm má potom tvar $nc\overleftarrow{n}$, a každý 2022-ciferný $ncc\overleftarrow{n}$, kde n je 1010-ciferné číslo a c je cifra. Nech A_n a B_n sú množiny tých 2021-ciferných, resp. 2022-ciferných palindrómov, ktorých prvé 1010-číslie je n (a teda posledné 1010-číslie je $\overleftarrow{n}$). Všimnime si, že A_n aj B_n obsahujú po 10 prvkoch.

Ukážeme spravodlivosť každého čísla d, kde $d = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom $a, c \in \{0, \dots, 1010\}$ a $b \in \{0, 1, 2\}$, a to tak, že dokážeme, že počet násobkov takého d je pre každé prípustné n v oboch množinách A_n a B_n rovnaký.

Rozoberme prípady:

- Nech $d = 1$.
  Potom vyhovuje všetkých 10 palindrómov z A_n i všetkých 10 palindrómov z B_n
- Nech $d = 2^a 5^c$, pričom $\max(a, c) \in \{1, \dots, 1010\}$.
  Deliteľnosť čísel $nc\overleftarrow{n}$ a $ncc\overleftarrow{n}$ takým číslom d je určená poslednými $\max(a, c)$ ciframi čísla $\overleftarrow{n}$, takže tvrdenie platí – buď sú násobkom d všetky čísla v A_n aj v B_n, alebo ním nie je žiadne číslo v A_n ani v B_n.
- Nech $d = 3^2 = 9$.
  Čísla $nc\overleftarrow{n}$ a $ncc\overleftarrow{n}$ dávajú po delení 9 rovnaký zvyšok ako čísla $2n + c$, resp. $2n + 2c$. Zvyšky čísel tvaru c po delení 9 sú 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, zvyšky čísel tvaru $2c$ po delení 9 sú 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 0, Ak je teda n násobkom 9, obsahujú obe množiny A_n, B_n po dvoch násobkoch 9 čiže d, v opačnom prípade po jednom násobku 9 čiže d.
- Nech $d = 3^1 = 3$.
  Čísla $nc\overleftarrow{n}$ a $ncc\overleftarrow{n}$ dávajú po delení 3 rovnaký zvyšok ako čísla $2n + c$, resp. $2n + 2c$. Zvyšky čísel tvaru c po delení 3 sú 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, zvyšky čísel tvaru $2c$ po delení 3 sú 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0. Ak je teda n násobkom 3, obsahujú obe množiny A_n, B_n po štyroch násobkoch 3 čiže d, v opačnom prípade po troch násobkoch 3 čiže d.
- Nech $d = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom $\max(a, c) \in \{1, \dots, 1010\}$ a $b \in \{1, 2\}$.
  Uvažujme najskôr číslo $e = 2^a 5^c$. Z dôkazu druhého prípadu vyplýva, že buď sú všetky čísla v A_n aj B_n násobky e, alebo žiadne z nich také nie je.
  Ak nastáva prvá možnosť, z výsledku tretieho, resp. štvrtého prípadu vyplýva, že obe množiny A_n aj B_n obsahujú rovnaký počet násobkov 3^b, a teda aj násobkov čísla $3^b \cdot e$ čiže d.
  Ak nastáva druhá možnosť, žiadna z množín A_n, B_n neobsahuje násobok e, a teda ani žiadny násobok d.

Spomedzi prvkov množiny $\{1, 2, \dots, 35\}$ má tvar $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom $a, c \in \{0, \dots, 1010\}$ a $b \in \{0, 1, 2\}$, práve týchto 18 čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32. Väčšina prvkov množiny zo zadania je teda spravodlivých.

Poznámka:

Dá sa ukázať, že žiadne zo zvyšných 17 čísel z množiny $\{1, 2 \dots, 35\}$ už nie je spravodlivé.

---

3 V ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme M stred strany BC a N stred oblúka BAC kružnice jemu opísanej. Ďalej označme l kružnicu s priemerom BC a D, E priesečníky l s osou uhla BAC. Body F, G ležia na kružnici l tak, že štvoruholník $DEFG$ je pravouholník. Dokážte, že body F, G, M, N ležia na jednej kružnici.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $|AB| < |AC|$ a že bod D leží na úsečke AE (ako máme na oboch obrázkoch). V iných prípadoch stačí vymeniť označenie bodov $B \leftrightarrow C$, resp. $D \leftrightarrow E$.

Označme ešte k kružnicu opísanú trojuholníku ABC a S jej priesečník s osou uhla BAC rôzny od A. Tento (tzv. Švrčkov) bod S je v našom prípade stredom kratšieho z oblúkov kružnice k medzi bodmi B a C, lebo podľa zadania je uhol BAC ostrý. Z definície bodu N potom vyplýva, že úsečka SN je priemerom kružnice k ležiacim na osi jej tetivy BC. Stred M tejto tetivy preto leží na úsečke SN tak, že platí $|MS| < |MN|$. Súčasne uhol BSC je tupý, čo vzhľadom na pravé uhly BDC a BEC znamená, že bod S leží vnútri úsečky DE. Keďže $DEFG$ je pravouholník, sú úsečky DF, EG (rovnako ako BC) priemery zadanej kružnice l, takže jej stred M je aj stredom úsečiek DF a EG.

Po týchto úvodných pozorovaniach uvedieme niekoľko spôsobov, ako riešenie dokončiť. Budeme v nich bez odkazov využívať známe vlastnosti mocnosti bodu ku kružnici a obvodových uhlov.

Riešenie 1:

Vyjdeme z toho, že bod M je spoločným vnútorným bodom tetív SN, BC kružnice k, ako aj tetív BC, DF, EG kružnice l. Platí tak reťazec rovností

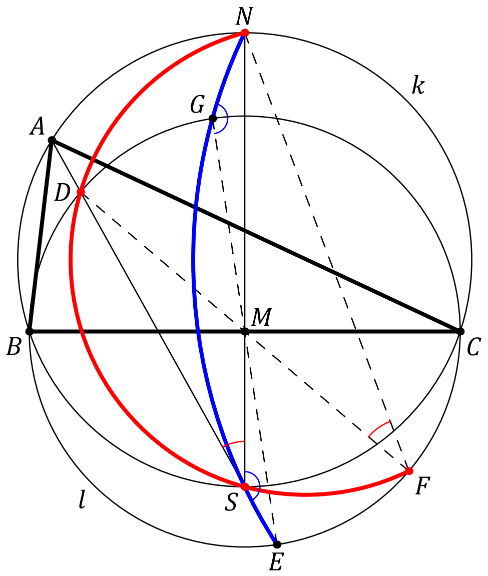
$$|MS| \cdot |MN| = |MB| \cdot |MC| = |MD| \cdot |MF| = |ME| \cdot |MG|.$$

Z toho vyplývajúca rovnosť prvého súčinu posledným dvom súčinom znamená práve to, že oba štvoruholníky $SDNF$ a $SENG$ (s priesečníkmi uhlopriečok v bode M) sú tetivové. Vďaka tomu platí (ako je farebne vyznačené na obrázku)

$$|\sphericalangle NFM| = |\sphericalangle NFD| = |\sphericalangle NSD|$$

a

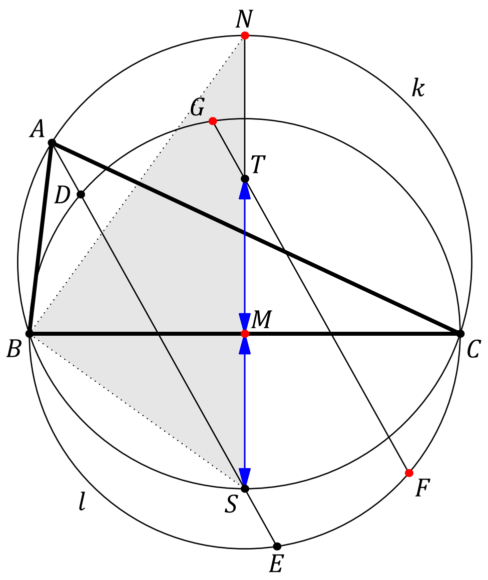
$$|\sphericalangle NGM| = |\sphericalangle NGE| = |\sphericalangle NSE|.$$



Keďže však $|\sphericalangle NSD| + |\sphericalangle NSE| = 180°$, máme aj $|\sphericalangle NFM| + |\sphericalangle NGM| = 180°$. Štyri body z poslednej rovnosti tak naozaj ležia na jednej kružnici (ako máme dokázať), ak ležia vrcholy F, G uhlov NFM, resp. NGM v opačných polrovinách s hraničnou priamkou MN. Táto priamka však pretína úsečku DE (v bode S), a teda aj úsečku FG (súmerne s ňou združenú podľa stredu M), čo sme chceli dokázať.

Riešenie 2:

Uvážime obraz T bodu S v súmernosti podľa stredu M, v ktorej sa tiež D zobrazí do F a E do G. Keďže podľa úvodnej časti bod S leží vnútri úsečky DE a platí $|MS| < |MN|$, leží bod T vnútri úsečiek FG a MN (pozri obrázok). Stačí nám dokázať rovnosť $|TF| \cdot |TG| = |TM| \cdot |TN|$.



Najskôr zo súmernosti podľa stredu M a z definície mocnosti bodu S vzhľadom ku kružnici l máme

$$|TF| \cdot |TG| = |SD| \cdot |SE| = |BM|^2 - |SM|^2 .$$

Ďalej použitím rovnosti $|TM| = |SM|$ a Euklidovej vety pre výšku BM pravouhlého trojuholníka SNB dostávame

$$|TM| \cdot |TN| = |TM| \cdot (|MN| - |TM|) = |SM| \cdot (|MN| - |SM|) = |SM| \cdot |MN| - |SM|^2 = |BM|^2 - |SM|^2 .$$

Tým je avizovaná rovnosť dokázaná.

Riešenie 3:

Opäť uvážime bod T z druhého postupu (pozri obrázok) a tentoraz využijeme kružnicovú inverziu podľa zadanej kružnice l. Keďže pri tomto zobrazení sú body F, G z kružnice l samodružné a stred M kružnice l neleží na priamke FG, bude, ako je známe, obrazom tejto priamky kružnica prechádzajúca bodmi F, G, M. Na nej však tiež bude ležať obraz bodu T, lebo $T \in FG$. Stačí teda ukázať, že zmieneným obrazom bodu T je práve bod N.

Euklidova veta pre výšku BM pravouhlého trojuholníka SNB dáva rovnosť

$$|BM|^2 = |MS| \cdot |MN| = |MT| \cdot |MN| .$$

Keďže M je stred a $|BM|$ polomer kružnice l, podľa ktorej invertujeme, a keďže bod N leží na polpriamke MT, je podľa rovnosti $|BM|^2 = |MT| \cdot |MN|$ bod N naozaj obrazom bodu T, čo sme chceli ukázať.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

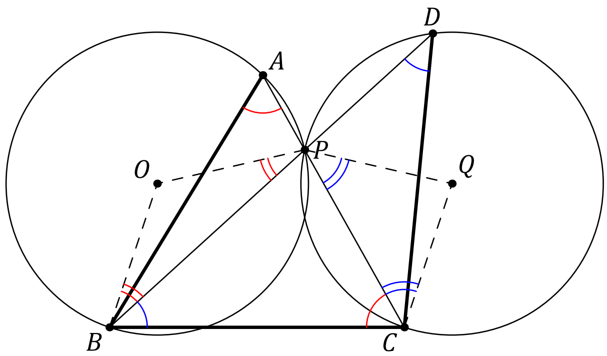
4 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P priesečník jeho uhlopriečok a O, Q stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom APB a DPC. Dokážte, že štvoruholník $OBCQ$ je rovnobežník.

(Patrik Bak)

Riešenie:

V prvej časti riešenia dokážeme, že úsečky BO a CQ ležia v polrovine BCP a sú rovnobežné, v druhej časti ukážeme, že tieto úsečky majú rovnakú dĺžku. Dokopy to už bude znamenať, že $OBCQ$ je rovnobežník.

Rovnoramenné trojuholníky ABC, BCD majú pri svojich základniach AC, resp. BD ostré vnútorné uhly, ktorých veľkosť označíme α, resp. β. Tieto uhly sú na obrázku vyznačené jedným oblúčikom. Ako hneď zdôvodníme, dvoma oblúčikmi zodpovedajúcej farby sú vyznačené uhly veľkosti $90° - \alpha$, resp. $90° - \beta$.



Keďže trojuholník ABP má pri vrchole A ostrý uhol α, leží stred O jemu opísanej kružnice v polrovine BPA a konvexný stredový uhol POB má veľkosť 2α. Preto v rovnoramennom trojuholníku BPO majú uhly pri vrcholoch B, P avizovanú veľkosť $90° - \alpha$. Analogicky sa dokáže, že stred Q leží v polrovine CPD a v rovnoramennom trojuholníku CPQ majú uhly pri vrcholoch C, P veľkosť $90° - \beta$.

Keďže ostré uhly OBP a CBP ležia na odlišných stranách od spoločného ramena BP, je uhol OBC s vnútorným bodom P konvexný, leží tak v polrovine BCP a má navyše veľkosť

$$|\sphericalangle OBC| = |\sphericalangle OBP| + |\sphericalangle CBP| = (90° - \alpha) + \beta.$$

Analogicky v polrovine BCP leží tiež uhol QCB a má veľkosť $(90° - \beta) + \alpha$. Dokopy vychádza

$$|\sphericalangle OBC| + |\sphericalangle QCB| = 180°,$$

a s prvou časťou riešenia sme tak hotoví.

Rovnosť $|OB| = |QC|$ dokážeme použitím rozšírenej sínusovej vety pre trojuholníky ABP a CDP. Tie sa totiž zhodujú vo veľkosti uhlov pri spoločnom vrchole P aj v dĺžke protiľahlých strán AB a CD, takže platí

$$2 \cdot |OB| = \frac{|AB|}{\sin |\sphericalangle APB|} = \frac{|CD|}{\sin |\sphericalangle CPD|} = 2 \cdot |QC|.$$

5 Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je číslo

$$2^n + n^2$$

druhou mocninou nejakého celého čísla.

(Tomáš Jurík)

Riešenie 1:

- Ak n je záporné, tak $2^n + n^2$ nie je celé číslo, tobôž nie druhá mocnina celého čísla.
- Ak $n = 0$, tak $2^n + n^2 = 1 + 0 = 1 = 1^2$, čo vyhovuje.
- Ak $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tak $2^n + n^2 \in \{3, 8, 17, 32, 57\}$, žiaden z týchto čísel však nie je druhá mocnina celého čísla.

- Ak $n = 6$, tak $2^n + n^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$, čo vyhovuje.
- Nech $n \geq 7$. Dokážeme sporom, že takéto n nevyhovuje.
  Nech teda $2^n + n^2 = m^2$, pričom m je celé číslo, o ktorom môžeme predpokladať, že je kladné, a teda podľa tejto rovnosti väčšie ako n. Podľa parity n rozlíšime dva prípady.

  a) Nech n je nepárne.
  Vtedy aj číslo m z rovnosti $2^n + n^2 = m^2$ je nepárne. Upravme túto rovnosť na tvar

  $$2^n = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

  Vidíme, že obe kladné čísla $m+n$ a $m-n$ sú mocninami 2, pričom $m+n > m-n$, takže $m-n \mid m+n$. Teda $m-n$ delí aj číslo $(m+n)-(m-n)$ čiže $2n$, pričom však n je nepárny činiteľ, takže $4 \nmid m-n$. Číslo $m-n$ je však párne, (lebo čísla m, n sú nepárne), preto $m-n=2$, t. j. $m = n+2$. Z toho

  $$2^n + n^2 = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4,$$

  a teda

  $$2^n = 4n + 4.$$

  My však matematickou indukciou ukážeme, že pre každé celé n, kde $n \geq 5$, platí $2^n > 4n + 4$, čo bude spor:

  1 Ak $n = 5$, tak $2^n = 32 > 24 = 4n + 4$.

  2 Ak pre nejaké n, kde $n \geq 5$, platí $2^n > 4n + 4$, tak

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(4n+4) = 8n + 8 > 4n + 8 = 4(n+1) + 4.$$

  b) Nech n je párne.
  Vtedy aj číslo m z rovnosti $2^n + n^2 = m^2$ je párne. Nech $n = 2k$, pričom k je celé číslo, ktoré vďaka predpokladu $n \geq 7$ spĺňa nerovnosť $k \geq 4$. Dokážeme ďalej, že platia nerovnosti $(2^k)^2 < m^2 < (2^k+2)^2$, z čoho vyplynie $2^k < m^2 < 2^k + 2$, a teda $m^2 = 2^k + 1$, čo bude spor s párnosťou m. Nerovnosti, ktoré sme sľúbili dokázať, majú tvar

  $$2^{2k} < 2^{2k} + (2k)^2 < 2^{2k} + 4 \cdot 2^k + 4.$$

  Ľavá nerovnosť je vďaka $(2k)^2 > 0$ triviálna, pravá nerovnosť je ekvivalentná nerovnosti

  $$2^k + 1 > k^2.$$

  Tú dokážeme pre každé celé k, kde ≥ 4, matematickou indukciou:

  1 Ak $k = 4$, tak $2^k + 1 = 17 > 16 = k^2$.

  2 Ak pre nejaké k, kde $k \geq 4$, platí $2^k + 1 > k^2$, tak

  $$2^{k+1} + 1 = 2(2^k + 1) - 1 > 2k^2 - 1 = k^2 + k^2 - 1 =$$
  $$= (k+1)^2 - 2k - 1 + k^2 - 1 = (k+1)^2 + k(k-2) - 2 > (k+1)^2.$$

Zhrnutím dostávame, že zadaniu vyhovujú práve čísla 0 a 6.

Riešenie 2:

Ak n je záporné, tak $2^n + n^2$ nie je celé číslo, tobôž nie druhá mocnina celého čísla.

Ak $n = 0$, tak $2^n + n^2 = 1 + 0 = 1 = 1^2$, čo vyhovuje.

Predpokladajme teda ďalej $n > 0$. Nech teda $2^n + n^2 = m^2$, pričom m je celé číslo, o ktorom môžeme predpokladať, že je kladné, a teda podľa tejto rovnosti väčšie ako n.

Upravme rovnicu $2^n + n^2 = m^2$ na súčinový tvar

$$2^n = (m-n)(m+n).$$

Druhý, a teda prvý činiteľ na pravej strane je kladný, oba preto musia byť mocniny dvoch. platí teda $m - n = 2^a$ a $m + n = 2^b$, pričom a, b sú celé čísla také, že $0 \leq a < b$. Odčítaním týchto dvoch vzťahov dostávame $2n = 2^b - 2^a$. Z toho je 2^a je párne, a teda $a > 0$. Vďaka vzťahu $2^n = 2^a \cdot 2^b$ potom platí $a + b = n$, takže

$$2(a+b) = 2n = 2^b - a^2.$$

Ukážeme, že v prípade $b \geq 6$ táto rovnosť nemôže nastať. Keďže z nerovnosti $a < b$ zrejme vyplýva $2(a+b) < 4b$ a na druhej strane zároveň $2^b - 2^a \geq 2^b - 2^{b-1} = 2^{b-1}$, stačí nám ukázať, že $4b < 2^{b-1}$. Použijeme na to matematickú indukciu:

1 Ak $b = 6$, tak $4b = 24 < 32 = 2^{b-1}$.

2 Ak pre nejaké b, kde $b \geq 6$, platí $4b < 2^{b-1}$, tak

$$4(b+1) = 4b + 4 < 4b + 4b = 2 \cdot 4b = 2 \cdot 2^{b-1} = 2^b.$$

Zvyšných 10 prípadov, keď platí $1 \leq a < b \leq 5$, vyskúšame priamo:

- Ak $a = 1$ a $b = 2$, tak $2(a+b) = 6 \neq 2 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 1$ a $b = 3$, tak $2(a+b) = 8 \neq 6 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 1$ a $b = 4$, tak $2(a+b) = 10 \neq 14 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 1$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 12 \neq 30 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 2$ a $b = 3$, tak $2(a+b) = 10 \neq 4 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 2$ a $b = 4$, tak $2(a+b) = 12 = 2^b - 2^a$.
  V tomto prípade $n = a + b = 6$, čo, ako ľahko vidieť, vyhovuje zadaniu.
- Ak $a = 2$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 14 \neq 28 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 3$ a $b = 4$, tak $2(a+b) = 14 \neq 8 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 3$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 16 \neq 24 = 2^b - 2^a$.
- Ak $a = 4$ a $b = 5$, tak $2(a+b) = 18 \neq 16 = 2^b - 2^a$.

Zhrnutím dostávame, že zadaniu vyhovujú práve čísla 0 a 6.

---

6 Pri pokuse o kolonizáciu Marsu zaplavilo ľudstvo slnečnú sústavu 50 satelitmi, ktoré medzi sebou vytvorili 225 komunikačných línií (každá línia existuje medzi jednou dvojicou satelitov a žiadne dva satelity medzi sebou nemajú viac ako jednu líniu). Hovoríme, že trojica satelitov je *prepojená*, ak aspoň jeden z nich má vytvorené komunikačné línie s oboma ostatnými satelitmi. Určte najmenší a najväčší možný počet prepojených trojíc satelitov.

(Ján Mazák, Josef Tkadlec)

Riešenie:

Nech S označuje množinu dotyčných satelitov, n ich počet (čiže $n = 50$) m počet komunikačných línií (čiže $m = 225$).

- O prepojenej trojici satelitov T a jej satelite s povieme, že s je *centrálny satelit* trojice T, ak je prepojený s oboma ostatnými satelitmi tejto trojice. Všimnime si, že každá prepojená trojica má buď jeden, alebo tri centrálne satelity.

  Definujme ešte *stupeň* d_s satelitu s ako počet komunikačných línií, ktoré má. Potom s je centrálnym satelitom v práve $\binom{d_s}{2}$ čiže $\frac{1}{2}d_s(d_s - 1)$ prepojených trojiciach. Keďže každá prepojená trojica má nanajvýš 3 centrálne satelity, pre celkový počet P prepojených trojíc platí

$$P \geq \frac{1}{3}\sum_{s\in S}\binom{d_s}{2} = \frac{1}{6}\left(\sum_{s\in S} d_s^2 - \sum_{s\in S} d_s\right) \geq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{s\in S} d_s\right)^2 - \sum_{s\in S} d_s\right),$$

  pričom posledná nerovnosť vyplýva znerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom pre n-ticu čísel $(d_s : s \in S)$, ktorá je sama dôsledkom Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti

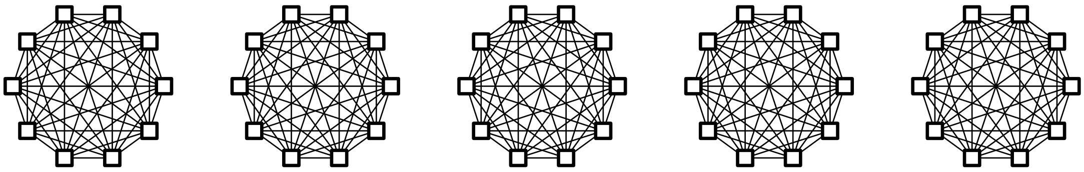
$$\left(\sum_{s\in S}(1 \cdot d_s)\right)^2 \leq \left(\sum_{s\in S} 1^2\right) \cdot \left(\sum_{s\in S} d_s^2\right).$$

  Súčet $\sum_{s\in S} d_s$, ktorý sa v získanom odhade objavil, je však rovný dvojnásobku počtu m všetkých komunikačných línií, lebo je v ňom každá línia započítaná práve dvakrát (raz za každý jej koniec). Dvojakým dosadením $2m$ čiže 450 za $\sum_{s\in S} d_s$ spolu so vzťahom $n = 50$ už z odvodenej nerovnosti dostávame sľúbený odhad

$$P \geq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{50} \cdot 450^2 - 450\right) = 600.$$

  Z nášho postupu navyše vyplýva, že rovnosť $P = 600$ nastane práve vtedy, keď všetkých P prepojených trojíc má po troch centrálnych satelitoch a zároveň všetkých 50 satelitov má ten istý stupeň, rovný teda, ako vieme, $2m/n$ čiže 9.

  To možno dosiahnuť, ak budú satelity prepojené ako na obrázku (všetkých 50 satelitov je rozdelených do 5 komunikačne izolovaných skupín po 10 navzájom prepojených satelitoch, majúcich teda naozaj ten istý stupeň 9).



- Trojica satelitov je prepojená práve vtedy, keď obsahuje dve alebo tri komunikačné línie. Vyplatí sa preto pre každú možnú hodnotu i z $\{0, 1, 2, 3\}$ označiť t_i počet tých trojíc satelitov, medzi ktorými je práve i komunikačných línií. Tvrdíme, že platí

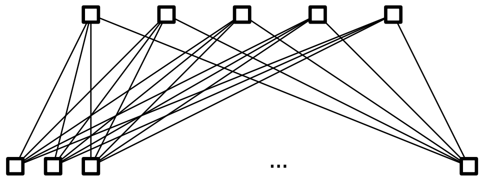
$$\sum_{i=0}^{3} i \cdot t_i = m \cdot (n-2).$$

Obe strany tejto rovnosti totiž vyjadrujú celkový počet usporiadaných dvojíc (T, l), pričom T je trojica satelitov a l je komunikačná línia medzi dvoma satelitmi tejto trojice, lebo na ľavej strane započítavame pre jednotlivé T, v koľkých dvojiciach (T, l) dané T vystupuje, zatiaľ čo pravou stranou vyjadrujeme fakt, že každé l sa vyskytuje v $n-2$ dvojiciach tvaru (T, l).

Z dokázanej rovnosti prepísanej na tvar $t_1 + 2t_2 + 3t_3 = m(n-2)$ vyplýva odhad

$$t_2 + t_3 = \frac{m(n-2) - t_1 - t_3}{2} \le \frac{m(n-2)}{2} = 5400,$$

pritom želaná rovnosť $t_2 + t_3 = 5\,400$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $t_1 = t_3 = 0$. To možno dosiahnuť, ak budú satelity prepojené ako na obrázku (pričom naozaj máme $5 + 45$ čiže 50 satelitov a $5 \cdot 45$ čiže 225 komunikačných línií).



Zhruntím dostávame, že najmenší možný počet prepojených satelitov je 600 a najväčší 5400.

Poznámka:

Príklady potrebné v oboch častiach riešenia sú jediné možné.

Poznámka:

Odhad počtu P všetkých prepojených trojíc v druhej časti riešenia možno získať tiež použitím *Jensenovej nerovnosti* pre konvexnú funkciu f takú, že $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$:

$$P \ge \frac{1}{3} \sum_{s \in S} \binom{d_s}{2} = \frac{n}{3} \cdot \frac{1}{n} \sum_{s \in S} \binom{d_s}{2} \ge \frac{n}{3} \cdot \binom{\frac{1}{n} \sum_{s \in S} d_s}{2} = \frac{n}{3} \cdot \binom{2m/n}{2}.$$