# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

## Riešenia úloh krajského kola kategórie B

**1** a) Rozhodnite, či existuje také kladné celé číslo $n$, že $2n$ je druhou mocninou prirodzeného čísla a $3n$ je treťou mocninou prirodzeného čísla.

b) Rozhodnite, či existuje také kladné celé číslo $n$, ktoré spĺňa podmienku časti a) a navyše $4n$ je štvrtou mocninou prirodzeného čísla.

(Josef Tkadlec)

**Riešenie 1:**

a) Obe podmienky spĺňa napríklad číslo 72, lebo $2 \cdot 72 = 144 = 12^2$ a $3 \cdot 72 = 216 = 6^3$.

b) Dokážeme sporom, že také číslo $n$ neexistuje.
Uvažujme jeho prvočíselný rozklad v tvare

$$2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot \dots \cdot p^{a_p},$$

pričom exponenty $a_2$, ..., $a_p$ sú celé a nezáporné.
Prvočíselný rozklad čísla $2n$ je potom

$$2^{a_2+1} \cdot 3^{a_3} \cdot \dots \cdot p^{a_p}.$$

Toto číslo je druhou mocninou prirodzeného čísla, preto je exponent $a_2 + 1$ párne číslo.
Prvočíselný rozklad čísla $4n$ je potom

$$4n = 2^{a_2+2} \cdot 3^{a_3} \cdot \dots \cdot p^{a_p}.$$

Toto číslo je štvrtou mocninou, preto je exponent $a_2 + 2$ deliteľný štyrmi. To je však spor, lebo $a_2 + 2$ je podľa predchádzajúceho odseku nepárne.

**Riešenie 2:**

a) Obe podmienky spĺňa napríklad číslo 72, lebo $2 \cdot 72 = 144 = 12^2$ a $3 \cdot 72 = 216 = 6^3$.

b) Hľadané číslo $n$ musí spĺňať rovnosť $2n = k^2$ pre nejaké kladné celé $k$. Keďže $\sqrt{4n} = \sqrt{2k^2} = k \cdot \sqrt{2}$ a číslo $\sqrt{2}$ je (ako je známe) iracionálne, nie je odmocnenec $4n$ druhou (a teda ani štvrtou) mocninou prirodzeného čísla.

**Poznámka:**

Aj keď je uvedené riešenia časti a) úplné, ukážeme, ako je možné (najmenšie vyhovujúce) číslo 72 objaviť.

Uvažujme prvočíselný rozklad hľadaného čísla $n$ v tvare

$$2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot \dots \cdot p^{a_p},$$

pričom exponenty $a_2, \dots, a_p$ sú celé a nezáporné.
Prvočíselný rozklad čísla $2n$ je potom

$$2^{a_2+1} \cdot 3^{a_3} \cdot \dots \cdot p^{a_p}.$$

Toto číslo je druhou mocninou prirodzeného čísla, preto sú všetky exponenty párne čísla, takže $a_2$ je nepárne a $a_3$ je párne.
Prvočíselný rozklad čísla $3n$ je

$$2^{a_2} \cdot 3^{a_3+1} \cdot \dots \cdot p^{a_p}.$$

Toto číslo je treťou mocninou prirodzeného čísla, preto sú všetky exponenty deliteľné troma, takže $a_2$ je deliteľné troma a $a_3$ dáva po delení troma zvyšok 2.

Najmenšie exponenty $a_2$ a $a_3$ ktoré spĺňajú zodpovedajúce podmienky, sú 3, resp. 2. Ak už v rozklade $n$ ďalšie prvočísla nie sú, platí $n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

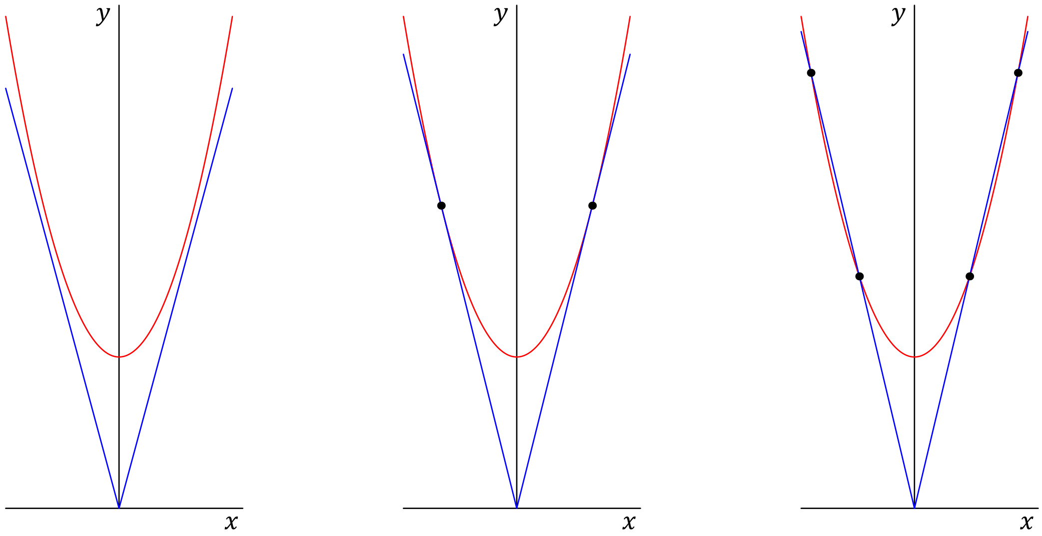
**Pokyny:**

Za úplné riešenie časti a) dajte 3 body, za úplné riešenie časti b) tiež 3 body. Za drobný nedostatok v argumentácii k časti b) strhnite 1 bod.

**2** Určte počet reálnych koreňov rovnice $x^2 + 4 = a|x|$ v závislosti od reálneho parametra $a$.

(Mária Dományová)

**Riešenie 1:**




Ako prvé uveďme grafické riešenie úlohy. Grafom funkcie s predpisom na ľavej strane rovnice je červená parabola „roztvorená nahor“, ktorá má vrchol v bode $(0,4)$. Grafom funkcie s predpisom na pravej strane je dvojica modrých polpriamok vychádzajúcich z počiatku, ktoré sú súmerne združené podľa osi $y$. Polpriamka smerujúca doprava (graf funkcie pre $x > 0$) má smernicu $a$, polpriamka smerujúca doľava má smernicu $-a$.

Uvedomme si, že celá situácia je súmerná podľa osi $y$. Môžu teda nastať tri prípady:

- Pre určitú hraničnú (zrejme kladnú) hodnotu $a_0$ parametra $a$ budú obe polpriamky dotyčnicami paraboly (pozri obrázok uprostred) – v tom prípade bude rovnica mať 2 reálne korene.
- Ak $a < a_0$, tak polpriamky parabolu nepretnú (obrázok vľavo), takže rovnica nebude mať žiadny reálny koreň.
- Ak $a > a_0$, tak každá z oboch polpriamok pretína parabolu v dvoch bodoch (obrázok vpravo) – rovnica potom bude mať celkom 4 reálne korene.

Stačí teda dopočítať onú hraničnú hodnotu $a_0$. Kvadratická rovnica $x^2 + 4 = a_0 x$ má teda práve jeden (dvojnásobný) koreň, čo nastane práve vtedy, keď jej diskriminant $a_0^2 - 16$ bude nulový. Platí teda $a_0 = 4$ (dvojnásobným koreňom je potom naozaj *kladné* číslo 2).

**Riešenie 2:**

Všimnime si, že číslo 0 nie je koreňom zadanej rovnice (pri žiadnom $a$), a hľadajme najskôr jej kladné korene.

V obore všetkých kladných čísel riešime rovnicu $x^2 + 4 = ax$ čiže $x^2 - ax + 4 = 0$. Jej prípadné reálne korene sú tvaru

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}.$$

Vidíme, že v prípade $|a| < 4$ je diskriminant záporný, a rovnica tak nemá žiadny reálny koreň. V prípade $|a| = 4$ má rovnica dvojnásobný koreň $\frac{1}{2}a$. Ten je však kladný práve vtedy, keď $a > 0$, teda v našom prípade $a = 4$. V prípade $|a| > 4$ má rovnica dva rôzne reálne korene. Vtedy však z $a^2 - 16 < a^2$ vyplýva $\sqrt{a^2 - 16} < |a|$, a preto oba korene majú rovnaké znamienko ako parameter $a$. Teda v prípade $a > 4$ má rovnica dva kladné korene, zatiaľ čo v prípade $a < -4$ nemá žiadny kladný koreň (oba korene sú záporné).

Z tvaru pôvodnej rovnice $x^2 + 4 = a|x|$ vyplýva, že číslo $x$ je jej koreňom práve vtedy, keď je jej koreňom číslo $-x$. Preto sa výsledky o počte riešení v obore kladných čísel bezo zmeny prenesú do oboru záporných čísel.

Získané poznatky dokopy vedú k rovnakému záveru ako v prvom riešení.

**Pokyny:**

V prípade neúplného grafického riešenia dajte:

A1 1 bod za dostatočný popis oboch grafov alebo ich nakreslenie pre niektoré $a$;

A2 3 body za vizuálne úvahy o vplyve smerníc $\pm a$ oboch polpriamok na počet ich priesečníkov s parabolou a sformulovanie záveru o existencii hodnoty $a_0$ s vlastnosťou, že rovnica bude mať celkom 4, 2, resp. 0 riešení podľa toho, či $a > a_0$, $a = a_0$, resp. $a < a_0$ (bez výpočtu $a_0$) (ak pritom využíva riešiteľ zrejmú súmernosť oboch grafov podľa osi $y$, zabudne ju však uviesť, tolerujte to);

A3 2 body za určenie hodnoty $a_0$, keď sa obe polpriamky dotýkajú paraboly.

Pri hodnotení neúplného algebraického riešenia postupujte nasledovne. Ak je konštatované, že vďaka symetrii stačí rovnicu riešiť v obore kladných čísel, dajte čiastkové body podľa nasledujúcej schémy. Polovicu v nej uvedených bodov udeľujte vždy za každý z oborov kladných a záporných čísel, ak nie je symetria spomenutá.

B1 2 body za dôkaz, že v prípade $|a| < 4$ nebude mať rovnica žiadne riešenie;

B2 2 body za úplné vyriešenie oboch prípadov $a \in \{\pm 4\}$;

B3 2 body za úplné vyriešenie prípadu $|a| > 4$.

Celkovo potom dajte maximálnu hodnotu zo súčtu bodov z A1, A2 a A3 a zo súčtu bodov z B1, B2 a B3.

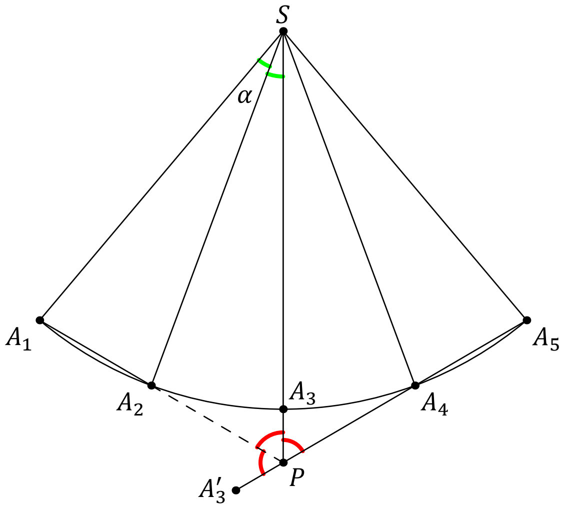
---

**3** Pre ktoré $n$, kde $n \geq 5$, platí, že ak $A_1A_2 \dots A_n$ je pravidelný $n$-uholník, tak obraz bodu $A_3$ v osovej súmernosti podľa priamky $A_1A_2$ leží na priamke $A_4A_5$?

(Josef Tkadlec)

**Riešenie 1:**

Označme $S$ stred pravidelného $n$-uholníka $A_1A_2 \dots A_n$ a $P$ priesečník polpriamok $A_1A_2$ a $A_5A_4$ (obrázok). Bod $P$ bude existovať pre každé $n$ väčšie než 6, zvyšné prípady rozoberieme na konci riešenia.




Zo súmernosti podľa priamky $SA_3$ je zrejmé, že bod $P$ leží na polpriamke $SA_3$. V zadaní úlohy vystupujúci obraz bodu $A_3$ v osovej súmernosti podľa priamky $A_1A_2$ označme $A_3'$. Ďalej nech $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, takže platí $|\sphericalangle A_1SA_2| = |\sphericalangle A_2SA_3| = \alpha$. V rovnoramennom trojuholníku $SA_1A_2$ máme $|\sphericalangle SA_2A_1| = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, takže

$$|\sphericalangle SA_2P| = 180^\circ - |\sphericalangle SA_2A_1| = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha,$$

a teda z trojuholníka $SA_2P$ vychádza

$$|\sphericalangle A_3PA_2| = |\sphericalangle SPA_2| = 180^\circ - \alpha - (90^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha.$$

Vďaka súmernej združenosti bodov $A_2$, $A_4$ podľa priamky $SA_3$ čiže $SP$ platí tiež $|\sphericalangle SPA_4| = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. Podobne vďaka súmernej združenosti bodov $A_3, A_3'$ podľa priamky $A_1A_2$ platí aj $|\sphericalangle A_2PA_3'| = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. Dokopy to znamená, že (nie nutne konvexný) uhol $A_3'PA_4$ s vnútorným bodom $S$ má veľkosť $3 \cdot (90^\circ - \frac{3}{2}\alpha)$ čiže $270^\circ - \frac{9}{2}\alpha$. Bod $A_3'$ leží na priamke $A_4A_5$ čiže $A_4P$ práve vtedy, keď platí $270^\circ - \frac{9}{2}\alpha = 180^\circ$, t. j. keď $\alpha = 20^\circ$. Keďže, ako vieme, $\alpha = 360^\circ/n$, dostávame $n = 18$.

Ostáva rozobrať prípady $n = 6$ a $n = 5$. Ak $n = 6$, tak priamky $A_1A_2$ a $A_4A_5$ sú rovnobežné a priamka $A_4A_5$ leží celá v polrovine opačnej k polrovine $SA_3A_3'$, a preto bod $A_3'$ neleží na priamke $A_4A_5$.

Ak $n = 5$, bod $A_3'$ a celá priamka $A_4A_5$ ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou $A_1A_3$ (ktorá je totiž rovnobežná s priamkou $A_4A_5$), takže ani vtedy bod $A_3'$ na priamke $A_4A_5$ neleží.

Jediné vyhovujúce $n$ je teda 18.

**Riešenie 2:**

Zostrojme kolmicu z bodu $A_3$ na priamku $A_1A_2$ a označme jej priesečníky s priamkami $A_1A_2$ a $A_4A_5$ postupne $O$ a $X$. Našou úlohou je zistiť, kedy bod $X$ je bodom $A_3'$ súmerne združeným s bodom $A_3$ podľa priamky $A_1A_2$.

Nastane to práve vtedy, keď bude platiť rovnosť $|A_3X| = |A_3A_3'|$, čiže $|A_3X| = 2\,|A_3O|$ a súčasne bod $X$ bude ležať na polpriamke $A_3O$.

Najskôr dokážeme, že ak bod $X$ na polpriamke $A_3O$ leží (ako na obrázku), tak rovnosť $|A_3X| = 2\,|A_3O|$ je splnená iba v prípade $n = 18$. Na záver potom ukážeme, že v takom prípade bod $X$ na polpriamke $A_3O$ naozaj leží.

Pre ďalšie výpočty označíme $\beta$ veľkosť uhla $A_3A_2O$ (na obrázku vyznačeného červenou). Ak je $S$ stred kružnice opísanej nášmu $n$-uholníku, tak platí

$$|\sphericalangle A_1SA_3| = 2 \cdot |\sphericalangle A_1SA_2| = \cdot 2 \cdot 360^\circ n$$

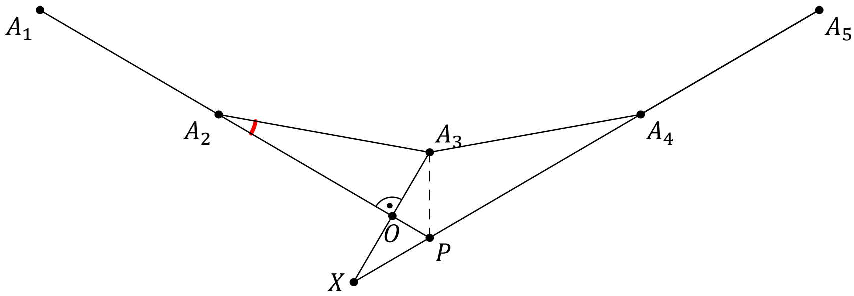
a podľa vety o stredovom a obvodovom uhle

$$|\sphericalangle A_1A_2A_3| = 180^\circ - \frac{|\sphericalangle A_1SA_3|}{2},$$

z čoho

$$\beta = |\sphericalangle A_3A_2O| = 180^\circ - |\sphericalangle A_1A_2A_3| = \frac{|\sphericalangle A_1SA_3|}{2} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Ďalej ešte využijeme, že veľkosť $180^\circ - \beta$ má nielen uhol $A_1A_2A_3$, ale aj uhol $A_2A_3A_4$.




Vyjadrime teraz pomocou $\beta$ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka $A_3A_4X$. Vďaka osovej súmernosti podľa priamky $AP$ platí $|\sphericalangle A_3A_4X| = \beta$. Na základe plného uhla s vrcholom $A_3$) platí

$$|\sphericalangle XA_3A_4| = 360^\circ - |\sphericalangle XA_3A_2| - |\sphericalangle A_2A_3A_4| = 360^\circ - (90^\circ - \beta) - (180^\circ - \beta) = 90^\circ + 2\beta.$$

Tak dostávame

$$|\sphericalangle A_3XA_4| = 180^\circ - \beta - (90^\circ + 2\beta) = 90^\circ - 3\beta.$$

Označme teraz $a$ dĺžku strany nášho $n$-uholníka. Keďže z trojuholníka $A_3A_2O$ vyplýva $|A_3O| = a\sin\beta$, želaná rovnosť $|A_3X| = 2\,|A_3O|$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $|A_3X| = 2a\sin\beta$. Podľa sínusovej vety pre trojuholník $A_3A_4X$ máme

$$|A_3X| : |A_3A_4| = \sin|\sphericalangle A_3A_4X| : \sin|\sphericalangle A_3XA_4|.$$

Ak sem dosadíme určené veľkosti uhlov spolu s dĺžkou $|A_3A_4| = a$, získame

$$|A_3X| = \frac{|A_3A_4| \cdot \sin|\sphericalangle A_3A_4X|}{\sin|\sphericalangle A_3XA_4|} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(90^\circ - 3\beta)} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\cos 3\beta}.$$

Posledný výraz má požadovanú hodnotu $2a\sin\beta$ práve vtedy, keď $\cos 3\beta = \frac{1}{2}$. To nastane práve v prípade $3\beta = 60^\circ$ čiže $\beta = \frac{360^\circ}{n} = 20^\circ$. Z toho už $n = 18$.

Ostáva ukázať, že v prípade $n = 18$ náš priesečník $X$ leží na polpriamke $A_3O$. To sme pri predchádzajúcich výpočtoch využili, keď sme veľkosti uhlov $A_3A_4X$ a $XA_3A_4$ počítali vlastne ako veľkosti uhlov $A_3A_4P$ a $OA_3A_4$. Platí teda $|\sphericalangle A_3A_4P| = \beta$ a $|\sphericalangle OA_3A_4| = 90^\circ + 2\beta$. Z toho v prípade $n = 18$, keď $\beta = 20^\circ$, dostávame

$$|\sphericalangle A_3A_4P| + |\sphericalangle OA_3A_4| = 90^\circ + 3\beta = 150^\circ < 180^\circ.$$

Táto nerovnosť už znamená, že polpriamky $A_3O$ a $A_4P$ sa pretínajú (a ich priesečníkom je teda bod $X$).

**Pokyny:**

*Vypočítaním* v nasledujúcej schéme pre neúplné riešenie rozumieme vyjadrenie závislosti od $n$, $\alpha$, $\beta$, $a$ alebo iného zvoleného prvku pravidelného $n$-uholníka. Za čiastkové kroky dajte:

X0 0 bodov za zavedenie bodov $O$, $P$, $X$;

X1 0 bodov za vypočítanie veľkostí ľubovoľných uhlov pri vrcholoch $n$-uholníka;

A 1 bod za pozorovanie, že požadovaná situácia nastane práve vtedy, keď $|\sphericalangle A_3'PA_4| = 180^\circ$;

B1 1 bod za pozorovanie, že tri uhly pri vrchole $P$ (červenou vyznačené na obrázku) sú vďaka dvom osovým súmernostiam zhodné;

B2 3 body za vypočítanie veľkostí všetkých uhlov $A_3'PA_2$, $A_2PA_3$ a $A_3PA_4$ (za každý uhol po 1 bode);

C1 1 bod za konštatovanie, že požadovaná situácia nastane práve vtedy, keď $|A_3X| = |A_3A_3'|$;

C2 1 bod za vypočítanie $|A_3A_3'|$ (čiže $2|A_3O|$ v našom riešení).

C3 3 body za vypočítanie $|A_3X|$.

Celkom potom dajte väčšiu z tchto dvoch hodnôt:

- súčet bodov z A a maxima z bodov z B1 a z B2;
- súčet bodov z C1, z C2 a z C3.

Absenciu rozboru prípadov $n = 5$, $n = 6$ (pri prvom postupe) či záverečnej diskusie o polohe bodu $X$ (pri druhom postupe) v inak úplnom riešení nepenalizujte.

---

**4** Tabuľka $10 \times 10$ je vyplnená číslami 10, $-4$ a 3 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je nanajvýš 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je nanajvýš 0. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke.

(Radovan Švarc)

**Riešenie:**

Všimnime si, že všetky tri čísla 10, $-4$ a 3 dávajú zvyšok 3 po delení siedmimi. Preto súčet desiatich čísel jedného riadka bude dávať po delení siedmimi rovnaký zvyšok ako číslo $10 \cdot 3$ čiže 30, teda zvyšok 2. Najväčšie nekladné číslo s touto vlastnosťou je $-5$. V každom z deviatich riadkov, kde je súčet nekladný, je teda súčet nutne nanajvýš $-5$. V poslednom riadku, na ktorý nemáme žiadne obmedzenia, je súčet nanajvýš $10 \cdot 10$ čiže 100. Celkový súčet čísel v tabuľke teda určite nepresiahne $9 \cdot (-5) + 100$ čiže 55.

Súčet 55 možno dosiahnuť, a to napríklad takouto tabuľkou:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | 3 | 3 | 3 | 10 |
| −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | 3 | 3 | 3 | 10 |
| −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | 3 | 3 | 3 | 10 |
| −4 | −4 | −4 | 3 | 3 | 3 | −4 | −4 | −4 | 10 |
| −4 | −4 | −4 | 3 | 3 | 3 | −4 | −4 | −4 | 10 |
| −4 | −4 | −4 | 3 | 3 | 3 | −4 | −4 | −4 | 10 |
| 3 | 3 | 3 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | 10 |
| 3 | 3 | 3 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | 10 |
| 3 | 3 | 3 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | −4 | 10 |

Najväčší možný súčet čísel v tabuľke je teda 55.

**Poznámka:**

Ak si nevšimneme, že všetky tri čísla 10, $-4$ a 3 dávajú zvyšok 3 po delení siedmimi, môžeme postupovať aj takto:

Ak je v riadku tabuľky $x$-krát číslo 10 a $y$-krát číslo 3, tak jeho súčet je $x \cdot 10 + y \cdot 3 + (10 - x - y) \cdot (-4)$ čiže $14x + 7y - 40$, t. j. $7(2x + y - 5) - 5$. Najväčšie nekladné číslo tohto tvaru je $-5$, a to v prípade $2x + y = 5$, t. j. $(x, y) \in \{(0,5), (1,3), (2,1)\}$.

V prípade $x = 0$ však nebude v tabuľke stĺpec so samými desiatkami, ktorý pre získanie celkového súčtu 55 potrebujeme. Vo zvyšných dvoch prípadoch vyhovujúca tabuľka existuje.

**Pokyny:**

V prípade neúplného riešenia dajte:

A 2 body za príklad (alebo úplný popis) tabuľky so súčtom 55;

B0 0 bodov za hypotézu, že súčet čísel v tabuľke nepresiahne 55;

B1 1 bod za hypotézu, že súčty v deviatich riadkoch (resp. stĺpcoch) nemôžu byť väčšie ako −5, a z toho vyplývajúci záver, že súčet čísel v tabuľke nepresiahne 55;

B2 4 body za dôkaz, že súčet čísel v tabuľke nemôže byť väčší ako 55, z toho 3 body za dôkaz, že súčty v deviatich riadkoch (resp. stĺpcoch) nemôžu byť väčšie ako −5, a 1 bod za získanie horného odhadu celkového súčtu číslom 55.

Celkom potom dajte súčet bodov z A a maxima bodov z B1 a z B2.